Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2024 – 2025

William GREGORY

Colle 29

Polynômes

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant mardi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Exercice 29.1

Le polynôme $P := \mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X} + 2$ admet-il des racines rationnelles ?

Exercice 29.2

Soit $n \geqslant 3$. On pose

$$A := \mathrm{X}^n + 3X + 2 \quad \text{et} \quad B := \mathrm{X}^3 - 2\mathrm{X}^2 + \mathrm{X}.$$

Déterminer le reste dans la division euclidienne de A par B.

Exercice 29.3

Soit $n \geqslant 2$.

1. Factoriser le polynôme $1 + \mathrm{X} + \cdots + \mathrm{X}^{n-1}$.

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right)$.

Exercice 29.4

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. On pose

$$P := a_0 + a_1\mathrm{X} + \cdots + a_n\mathrm{X}^n \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}].$$

Montrer que, si P admet une racine $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$, alors

$$p \mid a_0 \quad \text{et} \quad q \mid a_n \,.$$

Exercice 29.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
Factoriser, dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, le polynôme

$$X^{2n} - 2\cos(\theta)\mathrm{X}^n + 1.$$

Exercice 29.6

Soit $n \geqslant 2$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que le polynôme

$$P := \mathrm{X}^n + a\mathrm{X} + b$$

a au plus trois racines réelles distinctes.

Exercice 29.7

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme T_n vérifiant

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \ \mathrm{T}_n\big(\cos(\theta)\big) = \cos(n\theta). \qquad (\star)$$

2. Déterminer une relation entre T_n, T_{n+1} et T_{n+2}.

3. Déterminer une équation différentielle vérifiée par T_n.

4. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer ${\mathrm{T}_n}^{(k)}(1)$ et ${\mathrm{T}_n}^{(k)}(-1)$.

Exercice 29.8

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$

$$\Delta : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{C}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{C}[\mathrm{X}] \\ P & \longmapsto & P(\mathrm{X}+1) - P(\mathrm{X}). \end{array} \right.$$

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(\Delta)$ et $\mathrm{Im}(\Delta)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$.
Montrer que

$$\Delta^n(P) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} P(\mathrm{X}+k).$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Soit $P \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tel que $\deg(P) < n$.
En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k P(k) = 0.$$