Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2024 – 2025

William GREGORY

Colle 30 • INDICATIONS
Espaces préhilbertiens réels

Exercice 30.1

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On se place dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ muni de sa structure euclidienne canonique, et on considère

$$G := \mathrm{Vect}\left\{\mathrm{I}_n\right\}.$$

1. Déterminer $G^\perp$.

2. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer le projeté orthogonal de A sur $G^\perp$, noté $\mathrm{p}_{G^\perp}(A)$.

indication

2. Déterminer le projeté sur G puis relier la projection sur G à la projection sur $G^\perp$.

résultat

1. $G^\perp = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$.

2. $\mathrm{p}_{G^\perp}(A) = A - \dfrac{\mathrm{Tr}(A)}{n}\mathrm{I}_n$.

Exercice 30.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A^2 = A^\top = A.$$

Montrer que

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{\mathrm{rg}(A)}.$$

indication

- Puisque A est la matrice d'un projecteur, $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{rg}(A)$.
- Utiliser ensuite l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique, avec la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 et la matrice $\left(|a_{i,j}|\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Exercice 30.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer

$$\lambda_A := \inf \left\{ \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2 \; ; \; (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R}) \right\}.$$

indication

Le projeté orthogonal de A sur $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ est $\dfrac{A + A^\top}{2}$.

résultat

$$\lambda_A = \frac{1}{4} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_{i,j} - a_{j,i})^2.$$

Exercice 30.4

Calculer

$$m = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 \Big(t^2 - (at + b) \Big)^2 \, \mathrm{d}t.$$

indication

Travailler dans $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ muni de

$$\langle \cdot \mid \cdot \rangle : (P, Q) \longmapsto \int_0^1 P(t) Q(t) \, \mathrm{d}t$$

pour comprendre que

$$m = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|\mathrm{X}^2 - (a\mathrm{X} + b)\|^2 = \Big(\mathrm{d}(\mathrm{X}^2, \mathbb{R}_1[\mathrm{X}]) \Big)^2.$$

Déterminer a, b de sorte que

$$\mathrm{X}^2 - (a\mathrm{X} + b) \in \mathbb{R}_1[\mathrm{X}]^\perp.$$

résultat

$$m = \left\| \mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + \frac{1}{6} \right\|^2 = \frac{1}{180}.$$

Exercice 30.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\Big[\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \;\; X^\top A X = 0 \Big] \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ est antisymétrique.}$$

indication

- Montrer que
$$[\forall X, Y \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \ X^\top AY = 0] \quad \iff \quad A = 0_n.$$
- Pour le sens $\boxed{\Leftarrow}$, transposer.
- Pour le sens $\boxed{\Rightarrow}$, calculer $(X+Y)^\top A(X+Y)$ et utiliser ce qui précède.

Exercice 30.6

Soit $\big(E, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle\big)$ un espace euclidien. Soient H_1 et H_2 deux hyperplans distincts dont on note e_1 et e_2 les vecteurs unitaires orthogonaux.
On note s_1 (resp. s_2) la symétrie orthogonale par rapport à H_1 (resp. H_2).

1. Exprimer, pour $x \in E$, $\mathrm{s}_1(x)$ et $\mathrm{s}_2(x)$ en fonction de x, $\langle x\,|\,e_1\rangle$ et $\langle x\,|\,e_2\rangle$.

2. Soit $x \in E$. Montrer que
$$(\mathrm{s}_1 \circ \mathrm{s}_2)(x) = x \quad \iff \quad x \in H_1 \cap H_2.$$

3. Montrer que la somme ${H_1}^\perp + {H_2}^\perp$ est directe.

4. Montrer que
$$\forall x \in {H_1}^\perp + {H_2}^\perp, \quad (\mathrm{s}_1 \circ \mathrm{s}_2)(x) \in {H_1}^\perp + {H_2}^\perp.$$

indication

1. Utiliser que $\mathrm{p}_H + \mathrm{p}_{H^\perp} = \mathrm{Id}$ et $\mathrm{s} = 2\mathrm{p} - \mathrm{Id}$.
2. Obtenir $(\mathrm{s}_1 \circ \mathrm{s}_2)(x) = x - 2\langle \mathrm{s}_2(x)\,|\,e_1\rangle - 2\,\langle x\,|\,e_2\rangle\,e_2$ et utiliser la liberté de (e_1, e_2).
3. Montrer que ${H_1}^\perp \cap {H_2}^\perp = \{0_E\}$.
4. Écrire $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ et utiliser l'expression de $(\mathrm{s}_1 \circ \mathrm{s}_2)(x)$ précédente.

résultat

1. $s_1(x) = x - 2\,\langle x\,|\,e_1\rangle\,e_1$ et $s_2(x) = x - 2\,\langle x\,|\,e_2\rangle\,e_2$.

Exercice 30.7

Soit $\big(E, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle\big)$ un espace préhilbertien réel. Soit p un projecteur de E.
Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) p est un projecteur orthogonal ;
(ii) $\forall x, y \in E, \quad \big\langle p(x)\,\big|\,y\big\rangle = \big\langle x\,\big|\,p(y)\big\rangle$;
(iii) $\forall x \in E, \quad \big\langle x\,\big|\,p(x)\big\rangle \geqslant 0$;
(iv) $\forall x \in E, \quad \big\|p(x)\big\| \leqslant \|x\|$.

indication

On note $F := \mathrm{Im}(p)$.

- (i) $\implies$ (ii) : $y = \underbrace{p(y)}_{\in F} + \underbrace{y - p(y)}_{\in F^\perp}$.

- ♦ (ii) $\Longrightarrow$ (i) : montrer que $y \in \mathrm{Im}(p)$ est orthogonal à $x \in \mathrm{Ker}(p)$.
- ♦ (i) $\Longrightarrow$ (iii) : $x = x - p(x) + p(x)$.
- ♦ (iii) $\Longrightarrow$ (i) : développer $\langle p(x+ty) \,|\, x+ty \rangle$ où $x \in \mathrm{Ker}(p)$ et $y \in \mathrm{Im}(p)$.
- ♦ (i) $\Longrightarrow$ (iv) : utiliser le théorème de Pythagore.
- ♦ (iv) $\Longrightarrow$ (i) : utiliser l'inégalité

$$\|p(y+tx)\|^2 \leqslant \|y+tx\|^2$$

avec $x \in \mathrm{Ker}(p)$ et $y \in \mathrm{Im}(p)$ pour montrer que $\langle x \,|\, y \rangle = 0$.

Exercice 30.8 Suites de carré sommable.

On considère

$$\ell^2 := \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_n |u_n|^2 \text{ converge} \right\}.$$

On définit sur $\ell^2 \times \ell^2$ l'application suivante :

$$\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle : \big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \big) \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n.$$

1. Montrer que $\big(\ell^2, \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle\big)$ est un espace préhilbertien réel.

2. On considère

$$F := \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \exists p \in \mathbb{N} : \; \forall n \geqslant p, \; u_n = 0 \right\}.$$

(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de ℓ^2, différent de ℓ^2.

(b) Montrer que $F \neq (F^\perp)^\perp$.

indication

1. Il faut montrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, puis montrer que $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ définit bien un produit scalaire.
L'inégalité suivante sera utile :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |xy| \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}.$$

2. **(b)** Calculer le produit scalaire entre une suite de $F^\perp$ et $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots) \in F$ pour décrire $F^\perp$ et en déduire $(F^\perp)^\perp$.