William GREGORY

Colle 30

Espaces préhilbertiens réels

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant mardi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.
- Bonnes vacances, et bonne continuation !

Exercice 30.1

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On se place dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ muni de sa structure euclidienne canonique, et on considère

$$G := \mathrm{Vect}\left\{\mathrm{I}_n\right\}.$$

1. Déterminer $G^\perp$.

2. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer le projeté orthogonal de A sur $G^\perp$, noté $\mathrm{p}_{G^\perp}(A)$.

Exercice 30.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A^2 = A^\top = A.$$

Montrer que

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{\mathrm{rg}(A)}.$$

Exercice 30.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer

$$\lambda_A := \inf\left\{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2 \ ; \ (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})\right\}.$$

Exercice 30.4

Calculer

$$m = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \left(t^2 - (at+b)\right)^2 \mathrm{d}t.$$

Exercice 30.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\left[\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \ X^\top A X = 0\right] \iff A \text{ est antisymétrique.}$$

Exercice 30.6

Soit $\left(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle\right)$ un espace euclidien. Soient H_1 et H_2 deux hyperplans distincts dont on note e_1 et e_2 les vecteurs unitaires orthogonaux.
On note s_1 (resp. s_2) la symétrie orthogonale par rapport à H_1 (resp. H_2).

1. Exprimer, pour $x \in E$, $\mathrm{s}_1(x)$ et $\mathrm{s}_2(x)$ en fonction de x, $\langle x \mid e_1 \rangle$ et $\langle x \mid e_2 \rangle$.

2. Soit $x \in E$. Montrer que

$$(\mathrm{s}_1 \circ \mathrm{s}_2)(x) = x \quad \iff \quad x \in H_1 \cap H_2.$$

3. Montrer que la somme $H_1{}^{\perp} + H_2{}^{\perp}$ est directe.

4. Montrer que

$$\forall x \in H_1{}^{\perp} + H_2{}^{\perp}, \quad (\mathrm{s}_1 \circ \mathrm{s}_2)(x) \in H_1{}^{\perp} + H_2{}^{\perp}.$$

Exercice 30.7

Soit $\left(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle\right)$ un espace préhilbertien réel. Soit p un projecteur de E.
Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\begin{array}{ll}
\text{(i)} & p \text{ est un projecteur orthogonal} \,; \\
\text{(ii)} & \forall x, y \in E, \quad \left\langle p(x) \,\middle|\, y \right\rangle = \left\langle x \,\middle|\, p(y) \right\rangle \,; \\
\text{(iii)} & \forall x \in E, \quad \left\langle x \,\middle|\, p(x) \right\rangle \geqslant 0 \,; \\
\text{(iv)} & \forall x \in E, \quad \left\| p(x) \right\| \leqslant \|x\|.
\end{array}$$

Exercice 30.8 Suites de carré sommable.

On considère

$$\ell^2 := \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_n |u_n|^2 \text{ converge} \right\}.$$

On définit sur $\ell^2 \times \ell^2$ l'application suivante :

$$\langle \cdot \mid \cdot \rangle : \left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \right) \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n.$$

1. Montrer que $\left(\ell^2, \langle \cdot \mid \cdot \rangle\right)$ est un espace préhilbertien réel.

2. On considère

$$F := \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \exists p \in \mathbb{N} : \ \forall n \geqslant p, \ u_n = 0 \right\}.$$

(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de ℓ^2, différent de ℓ^2.

(b) Montrer que $F \neq (F^{\perp})^{\perp}$.