William GREGORY

Colle 11

Limites et continuité

- Après votre colle, vous êtes invité à reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Vous pouvez me rendre ce travail en le donnant à vos camarades m'ayant en colle la semaine prochaine, ou en le déposant à l'accueil du lycée.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Limites

Exercice 11.1

Déterminer les limites :
$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right).$$

Exercice 11.2

Déterminer les limites :
$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}.$$

Exercice 11.3

Déterminer les limites :
$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Exercice 11.4

1. Montrer que $\cos(\cdot)$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

2. Quel résultat plus général peut-on établir pour des fonctions périodiques ?

Exercice 11.5

Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{p\to+\infty} \lim_{q\to+\infty} \cos(p!\pi x)^q = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x).$$

Exercice 11.6

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

$$\text{(i)} \quad \lim_{x\to+\infty} \left|f(x)\right| = \lim_{x\to-\infty} \left|f(x)\right| = +\infty\,;$$
$$\text{(ii)} \quad \forall [a,b] \subset \mathbb{R}, \quad f^{-1}\left([a,b]\right) \text{ est bornée.}$$

Continuité

Exercice 11.7

Que dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue admettant des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$? Le démontrer.

Exercice 11.8

Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues coïncidant sur une partie dense de $\mathbb{R}$. Que peut-on dire de f et g ? Le démontrer.

Exercice 11.9

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$.
On suppose que :

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue en a ;

(ii) il existe $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon, \quad \forall x \in I, \quad \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Montrer que f est continue en a.