William GREGORY

Colle 11 • INDICATIONS

Limites et continuité

Exercice 11.1

Déterminer les limites :

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right).$$

indication

- Pour la première, on utilisera un taux d'accroissement.
- Pour la deuxième, on utilisera la première.

résultat

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = 1.$$

Exercice 11.2

Déterminer les limites :

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}.$$

indication

- Pour la première, on utilisera un taux d'accroissement.
- Pour la deuxième, on utilisera la première, en exprimant $\cos(x)$ en fonction de $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$:

$$\cos(x) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

résultat

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Exercice 11.3

Déterminer les limites :

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

indication

- Pour la première, on utilisera un taux d'accroissement.
- Pour la deuxième, on utilisera la première avec la définition « $a^b = \mathrm{e}^{b\ln(a)}$ ».

résultat

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

Exercice 11.4

1. Montrer que $\cos(\cdot)$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

2. Quel résultat plus général peut-on établir pour des fonctions périodiques ?

indication

1. Utiliser deux suites qui convergent vers $+\infty$ et aboutir à une contradiction avec la caractérisation séquentielle de la limite et l'unicité de la limite.

2. De la même manière, établir qu'une fonction périodique non constante n'admet pas de limite en $\pm\infty$.

Exercice 11.5

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{p\to+\infty} \lim_{q\to+\infty} \cos(p!\pi x)^q = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x).$$

indication

Se donner $x \in \mathbb{R}$ et distinguer deux cas :

- si $x \in \mathbb{Q}$, montrer que, à partir d'un certain p, le nombre $p!\pi x$ est un multiple de 2π ;
- si $x \notin \mathbb{Q}$, montrer que $\left|p!\pi x\right| < 1$.

Exercice 11.6

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\lim_{x\to+\infty} \left|f(x)\right| = \lim_{x\to-\infty} \left|f(x)\right| = +\infty$;

(ii) $\forall [a,b] \subset \mathbb{R}, \quad f^{-1}\big([a,b]\big)$ est bornée.

indication

Utiliser les définitions mises en jeu dans les assertions considérées.

Exercice 11.7

Que dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue admettant des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$? Le démontrer.

indication

La fonction f est bornée. À l'aide de la définition de la limite en $+\infty$ et $-\infty$, on étudiera f sur trois intervalles $]\infty, a]$, $[a, b]$ et $[b, +\infty[$ et le théorème des bornes atteintes.

Exercice 11.8

Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues coïncidant sur une partie dense de $\mathbb{R}$. Que peut-on dire de f et g ? Le démontrer.

indication

Les fonctions f et g sont égales sur $\mathbb{R}$. On utilisera la caractérisation séquentielle de la continuité.

Exercice 11.9

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$.
On suppose que :

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue en a ;

(ii) il existe $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon, \quad \forall x \in I, \quad \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Montrer que f est continue en a.

indication

Écrire la définition quantifiée de la continuité de f en a et l'hypothèse. Pour ε et n assez grand ($n \geqslant N_\varepsilon$ donné par l'hypothèse), majorer $\left|f(x) - f(a)\right|$ en écrivant que :

$$f(x) - f(a) = f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a).$$