William GREGORY

Colle 13

Arithmétique des entiers

- Après votre colle, vous êtes invité à reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Vous pouvez me rendre ce travail en le donnant à vos camarades m'ayant en colle la semaine prochaine, ou en le déposant à l'accueil du lycée.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Exercice 13.1

1. En raisonnant par l'absurde, montrer que le système

$$(S) \qquad \begin{cases} x \equiv 5 \ [6] \\ x \equiv 4 \ [8] \end{cases}$$

n'admet pas de solution $x \in \mathbb{Z}$.

2. **(a)** Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.

(b) Soient a et b deux entiers naturels premiers entre eux. Soit $c \in \mathbb{Z}$. Montrer que :

$$\left[a \mid c \quad \text{et} \quad b \mid c \right] \quad \Longleftrightarrow \quad ab \mid c\,.$$

3. On considère le système (S) d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$ suivant :

$$(S) \qquad \begin{cases} x \equiv 6 \ [17] \\ x \equiv 5 \ [16] \\ x \equiv 4 \ [15]\,. \end{cases}$$

(a) Déterminer une solution particulière $x_0 \in \mathbb{Z}$ de (S).

(b) Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de (S) dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 13.2

Déterminer tous les couples d'entiers naturels (a, b) tels que :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 9792 \\ a \wedge b = 24. \end{cases}$$

Exercice 13.3

1. Donner une solution dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation diophantienne

$$5u + 13v = 1.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation de congruence :

$$5x + 4 \equiv 7 \ [13].$$

Exercice 13.4

Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m = \{1\} \iff n \wedge m = 1.$$

Exercice 13.5

Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $a \geqslant 2$. Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\mathrm{PGCD}(a^n - 1, a^m - 1) = a^{\mathrm{PGCD}(n,m)} - 1.$$

Exercice 13.6

Soit $x \in \mathbb{Q}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$.
Montrer que :

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \implies x \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 13.7

On note, pour $n \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{Div}(n)$ l'ensemble des diviseurs positifs de n.
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que a et b sont premiers entre eux.
Montrer que l'application

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Div}(a) \times \mathrm{Div}(b) & \longrightarrow & \mathrm{Div}(ab) \\ (k, \ell) & \longmapsto & k\ell \end{array} \right.$$

est correctement définie et bijective.

Exercice 13.8

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer qu'il existe un unique couple $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que :
$$\left(1 + \sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}.$$

2. **(a)** Calculer ${a_n}^2 - 2{b_n}^2$.

(b) En déduire que a_n et b_n sont premiers entre eux.

Exercice 13.9

Soit $\sigma : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que, pour $n \in \mathbb{Z}$, $\sigma(n)$ est la somme des diviseurs positifs de n.

1. Soit p un nombre premier. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sigma(p^\alpha)$.

2. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ deux entiers premiers entre eux.

(a) Soit d un diviseur positif de ab. Montrer que :

$$\exists!(d_1, d_2) \in \mathbb{N}^* : \begin{cases} d_1 \mid a\,, \quad d_2 \mid b \\ d = d_1 d_2. \end{cases}$$

(b) En déduire que $\sigma(ab)$ en fonction de $\sigma(a)$ et $\sigma(b)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\sigma(n)$ en fonction de la décomposition en produit de facteurs premiers de n.

Exercice 13.10

Soit p un nombre premier impair.
Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (1+p)^{p^k} \equiv 1 + p^{k+1} \; \left[p^{k+2}\right].$$

Exercice 13.11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant 2$.
Montrer que :

$$n \text{ est premier} \iff (n-1)! \equiv -1 \; [n].$$