Lycée Chateaubriand
MPSI 1 • 2025 – 2026

William GREGORY

Colle 17

Polynômes

- Après votre colle, vous êtes invité à reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Vous pouvez me rendre ce travail en le donnant à vos camarades m'ayant en colle la semaine prochaine, ou en le déposant à l'accueil du lycée.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Exercice 17.1

Soit $n \geqslant 3$. On pose :

$$A := \mathrm{X}^n + 3\mathrm{X} + 2 \text{ et } B := \mathrm{X}^3 - 2\mathrm{X}^2 + \mathrm{X}.$$

Déterminer le reste dans la division euclidienne de A par B.

Exercice 17.2

Soit $n \geqslant 2$. On pose :

$$A := \mathrm{X}^n \quad \text{et} \quad B := \mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X} + 2.$$

Déterminer le reste dans la division euclidienne de A par B.

Exercice 17.3

Soit $P \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq b$. On suppose que :

- le reste de la division euclidienne de P par $\mathrm{X} - a$ vaut 1 ;
- le reste de la division euclidienne de P par $\mathrm{X} - b$ vaut -1.

Que vaut le reste de la division euclidienne de P par $(\mathrm{X} - a)(\mathrm{X} - b)$?

Exercice 17.4

Montrer qu'il n'existe pas d'élément $P \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P(t) = \mathrm{e}^t.$$

Exercice 17.5

Soient $m, n, p \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \binom{m}{p-k}.$$

Exercice 17.6

Soit $P \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ non nul et soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que :

$$P'' - 4\mathrm{X}\, P' = \lambda P.$$

Déterminer λ.

Exercice 17.7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
Factoriser, dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, le polynôme :

$$\mathrm{X}^{2n} - 2\cos(\theta)\, \mathrm{X}^n + 1.$$

Exercice 17.8

Soit $Q \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $Q(\mathrm{X}+1) = Q(\mathrm{X})$.
Montrer que Q est constant.

Exercice 17.9

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 tels que P' divise P.

Exercice 17.10

Soit $P \coloneqq a_0 + a_1\mathrm{X} + \cdots + a_n\mathrm{X}^n \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$.

1. Soit $r > 0$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer :
$$\int_0^{2\pi} P(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t.$$

2. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \left|P(z)\right| \leqslant M.$$
Montrer que P est constant.

Exercice 17.11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.
Soient $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$.
Montrer qu'il existe un unique polynôme $\mathrm{L} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que :
$$\begin{cases} \deg(\mathrm{L}) = n - 1 \\ \forall k \in [\![1, n]\!], \;\; \mathrm{L}(x_k) = y_k. \end{cases}$$

Exercice 17.12

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. On pose :
$$P \coloneqq a_0 + a_1\mathrm{X} + \cdots + a_n\mathrm{X}^n \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}].$$
Montrer que, si P admet une racine $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$, alors :
$$p \mid a_0 \quad \text{et} \quad q \mid a_n.$$

Exercice 17.13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$.
On note $P \coloneqq \mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_1\mathrm{X} + a_0$.
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P. Montrer que :
$$|\alpha| \leqslant 1 + \max_{k \in [\![0, n-1]\!]} |a_k|.$$