Colle 17 • INDICATIONS
Polynômes

Exercice 17.1

Soit $n \geqslant 3$. On pose :

$$A := \mathrm{X}^n + 3\mathrm{X} + 2 \quad \text{et} \quad B := \mathrm{X}^3 - 2\mathrm{X}^2 + \mathrm{X}.$$

Déterminer le reste dans la division euclidienne de A par B.

indication

Commencer par écrire $B = \mathrm{X}(\mathrm{X}-1)^2$ pour déterminer ses racines, puis évaluer la relation $A = BQ + R$ en $\mathrm{X} = 0$, $\mathrm{X} = 1$ et sa dérivée en $\mathrm{X} = 1$ (car 1 est racine double de B), pour déterminer les coefficients de R (de degré 2 car B est de degré 3).

résultat

$$R = (n-1)\mathrm{X}^2 + (5-n)\mathrm{X} + 2.$$

Exercice 17.2

Soit $n \geqslant 2$. On pose :

$$A := \mathrm{X}^n \quad \text{et} \quad B := \mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X} + 2.$$

Déterminer le reste dans la division euclidienne de A par B.

indication

Commencer par écrire $B = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)$ pour déterminer ses racines, puis évaluer la relation $A = BQ + R$ en 1 et 2, pour déterminer les coefficients de R (de degré 2 car B est de degré 3).

résultat

$$R = (2^n - 1)\mathrm{X} - 2^n + 2.$$

Exercice 17.3

Soit $P \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq b$.
On suppose que :

- le reste de la division euclidienne de P par $\mathrm{X} - a$ vaut 1 ;
- le reste de la division euclidienne de P par $\mathrm{X} - b$ vaut -1.

Que vaut le reste de la division euclidienne de P par $(\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b)$?

indication

On écrit $P=(\mathrm{X}-a)Q_a+1$, $P=(\mathrm{X}-b)Q_b-1$ et $P=(\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b)Q+R$ en explicitant $R=\alpha\mathrm{X}+\beta$ puis évaluer en a et b.

résultat

Le reste vaut $\dfrac{2}{a-b}\mathrm{X}-\dfrac{a+b}{a-b}$.

Exercice 17.4

Montrer qu'il n'existe pas d'élément $P\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad P(t)=\mathrm{e}^t.$$

indication

Raisonner par l'absurde et considérer un tel polynôme, puis distinguer deux cas :

- si $\deg(P)$ est impair, alors P admet une racine réelle (à comprendre et savoir démontrer), ce qui est impossible car l'exponentielle ne s'annule pas ;
- si $\deg(P)$ est pair, la contradiction vient de l'étude des limites en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 17.5

Soient $m,n,p\in\mathbb{N}$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}.$$

indication

Développer d'une part $(\mathrm{X}+1)^{n+m}$ et, d'autre part, $(\mathrm{X}+1)^n\times(\mathrm{X}+1)^m$, à l'aide du binôme de Newton, puis écrire l'égalité des coefficients de degré p.

résultat

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}=\binom{n+m}{p}.$$

Exercice 17.6

Soit $P\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ non nul et soit $\lambda\in\mathbb{R}$ tels que :

$$P''-4\mathrm{X}P'=\lambda P.$$

Déterminer λ.

indication

- Si $\deg(P)=0$, montrer que $\lambda=0$.
- Si $\deg(P)>0$, on peut supposer P unitaire. Écrire l'égalité des coefficients dominants de $P''-4\mathrm{X}P'$ et λP.

résultat

$$\lambda = -4\deg(P).$$

Exercice 17.7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
Factoriser, dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, le polynôme :

$$\mathrm{X}^{2n} - 2\cos(\theta)\,\mathrm{X}^n + 1.$$

indication

Factoriser $\mathrm{Y}^2 - 2\cos(\theta)\mathrm{Y} + 1$ puis substituer par $\mathrm{Y} = \mathrm{X}^n$, et déterminer les racines de $\mathrm{X}^n - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $\mathrm{X}^n - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.

résultat

$$\mathrm{X}^{2n} - 2\cos(\theta)\mathrm{X}^n + 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{X}^2 - 2\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + 1\right).$$

Exercice 17.8

Soit $Q \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $Q(\mathrm{X}+1) = Q(\mathrm{X})$.
Montrer que Q est constant.

indication

Utiliser le théorème de d'Alembert-Gauss pour trouver une infinité de racines à Q.

Exercice 17.9

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 tels que P' divise P.

indication

Raisonner par analyse-synthèse. Fixer a, λ tels que $P = \lambda(X-a)P'$ et utiliser la formule de Taylor en a pour P puis dériver.

Exercice 17.10

Soit $P := a_0 + a_1\mathrm{X} + \cdots + a_n\mathrm{X}^n \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$.

1. Soit $r > 0$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$\int_0^{2\pi} P(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t.$$

2. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \left|P(z)\right| \leqslant M.$$

Montrer que P est constant.

indication

1. Calculer, pour $\ell \in \mathbb{Z}$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell t}\,\mathrm{d}t$.

2. Utiliser l'inégalité triangulaire intégrale ($\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$) et passer à la limite pour montrer que les a_k pour $k \geqslant 1$ sont nuls.

résultat

1. $$\int_0^{2\pi} P\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 2\pi a_k r^k & \text{si } k \in [\![0, n]\!] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 17.11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Soient $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$.
Montrer qu'il existe un unique polynôme $\mathrm{L} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que :

$$\begin{cases} \deg(\mathrm{L}) = n - 1 \\ \forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mathrm{L}(x_k) = y_k. \end{cases}$$

indication

- Existence.
  - Commencer par considérer les polynômes $\displaystyle\mathrm{L}_k := \prod_{j \neq k} \frac{\mathrm{X} - x_k}{x_j - x_k}$ vérifiant :
  $$\forall k, j \in [\![1, n]\!], \quad \mathrm{L}_k(x_j) = \delta_j^k.$$
  - On peut ensuite poser $\displaystyle\mathrm{L} := \sum_{k=1}^{n} y_k \mathrm{L}_k$ et vérifier les conditions requises.
- Unicité. Prendre deux tels polynômes et vérifier qu'ils coïncident en n points.

Exercice 17.12

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. On pose :

$$P := a_0 + a_1\mathrm{X} + \cdots + a_n\mathrm{X}^n \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}].$$

Montrer que, si P admet une racine $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$, alors :

$$p \mid a_0 \quad \text{et} \quad q \mid a_n.$$

indication

Utiliser la relation $P(\alpha) = 0$ multipliée par q^n, factoriser par p et par q pour démontrer les deux résultats.

Exercice 17.13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$.
On note $P := X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$.
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P. Montrer que :

$$|\alpha| \leqslant 1 + \max_{k \in [\![0, n-1]\!]} |a_k|.$$

indication

Distinguer deux cas.

- Cas où $|\alpha| \leqslant 1$.
- Cas où $|\alpha| > 1$. Écrire la relation $\alpha^n = -a_{n-1}\alpha^{n-1} - \cdots - a_0$, prendre le module, à l'aide d'une majoration et d'un calcul de somme géométrique, obtenir :

$$|\alpha|^n \leqslant \frac{|\alpha|^n - 1}{|\alpha| - 1} \times \max_{k \in [\![0, n-1]\!]} |a_k|,$$

puis majorer $|\alpha|^n - 1$ par $|\alpha|^n$.