Lycée Chateaubriand
MPSI 1 • 2025 – 2026

William GREGORY

Colle 18

Polynômes et fractions rationnelles

- Après votre colle, vous êtes invité à reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Vous pouvez me rendre ce travail en le donnant à vos camarades m'ayant en colle la semaine prochaine, ou en le déposant à l'accueil du lycée.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Décompositions en éléments simples

Exercice 18.1

Décomposer en éléments simples la fraction :

$$\frac{\mathrm{X}+1}{(\mathrm{X}-1)^2(\mathrm{X}-2)(\mathrm{X}-3)}.$$

Exercice 18.2

Décomposer en éléments simples la fraction :

$$\frac{\mathrm{X}^2+2}{(\mathrm{X}+1)\mathrm{X}^2(\mathrm{X}-1)^2}.$$

Exercice 18.5

Calculer l'intégrale :

$$\int_1^2 \frac{x}{(2x+1)(x+2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 18.6

Calculer l'intégrale :

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 18.7

Calculer l'intégrale :

$$\int_2^3 \frac{x}{x^4-1}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 18.3

Décomposer en éléments simples la fraction :

$$\frac{1-\mathrm{X}}{\mathrm{X}(\mathrm{X}+\pi)^2}.$$

Exercice 18.4

Décomposer en éléments simples la fraction :

$$\frac{2\mathrm{X}^3+1}{\mathrm{X}^4-3\mathrm{X}^2+2\mathrm{X}}.$$

Exercice 18.8

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Soient $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{C}$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On pose :

$$P := \lambda(\mathrm{X}-a_1)^{\alpha_1} \dots (\mathrm{X}-a_p)^{\alpha_p}.$$

1. **(a)** Donner l'expression de P'.
(b) Déterminer $\beta_1, \dots, \beta_p \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\beta_k}{\mathrm{X}-a_k}.$$

2. On suppose que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 1$.

Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{a_k}$.

Polynômes

Exercice 18.9

Soit $n \geqslant 2$.

1. Factoriser le polynôme $1 + \mathrm{X} + \cdots + \mathrm{X}^{n-1}$.

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right)$.

Exercice 18.10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$.
On note $P := \mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_1\mathrm{X} + a_0$.
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P. Montrer que :

$$|\alpha| \leqslant 1 + \max_{k \in [\![0,n-1]\!]} |a_k|.$$

Exercice 18.11

Soit $n \geqslant 2$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$.
Montrer que le polynôme

$$P := \mathrm{X}^n + a\mathrm{X} + b$$

a au plus trois racines réelles distinctes.

Exercice 18.12

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que :

$$\mathrm{X}^a - 1 \,\Big|\, \mathrm{X}^b - 1 \iff a \mid b.$$

Exercice 18.13

Déterminer les triplets (a, b, c) de complexes de module 1 tels que :

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ abc = 1. \end{cases}$$

Exercice 18.14

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.
Montrer que le polynôme

$$P_n := \mathrm{X}^n - \mathrm{X} + 1$$

n'admet que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

Exercice 18.15

Soit $P := a_0 + a_1\mathrm{X} + \cdots + a_n\mathrm{X}^n \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$.

1. Soit $r > 0$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$\int_0^{2\pi} P(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t.$$

2. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \big|P(z)\big| \leqslant M.$$

Montrer que P est constant.

Exercice 18.16

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme T_n vérifiant :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{T}_n\big(\cos(\theta)\big) = \cos(n\theta). \qquad (\star)$$

2. Déterminer une relation entre T_n, T_{n+1} et T_{n+2}.

3. Déterminer une équation différentielle vérifiée par T_n.

4. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer ${\mathrm{T}_n}^{(k)}(1)$ et ${\mathrm{T}_n}^{(k)}(-1)$.