William GREGORY

Colle 18 • INDICATIONS
Polynômes et fractions rationnelles

Exercice 18.1

Décomposer en éléments simples la fraction :
$$\frac{X+1}{(X-1)^2(X-2)(X-3)}.$$

résultat
$$\frac{-3}{X-2}+\frac{1}{X-3}+\frac{2}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}.$$

Exercice 18.2

Décomposer en éléments simples la fraction :
$$\frac{X^2+2}{(X+1)X^2(X-1)^2}.$$

résultat
$$\frac{2}{X}+\frac{2}{X^2}-\frac{11}{4(X-1)}+\frac{3}{2(X-1)^2}+\frac{3}{4(X+1)}.$$

Exercice 18.3

Décomposer en éléments simples la fraction :
$$\frac{1-X}{X(X+\pi)^2}.$$

résultat
$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\pi X}-\frac{1}{\pi(X+\pi)}-\frac{1+\pi}{(X+\pi)^2}\right).$$

Exercice 18.4

Décomposer en éléments simples la fraction :
$$\frac{2X^3+1}{X^4-3X^2+2X}.$$

résultat

$$\frac{1}{2X}+\frac{5}{6(X+2)}+\frac{2}{3(X-1)}+\frac{1}{(X-1)^2}.$$

Exercice 18.5

Calculer l'intégrale :

$$\int_1^2 \frac{x}{(2x+1)(x+2)^2}\,dx.$$

résultat

$$\int_1^2 \frac{x}{(2x+1)(x+2)^2}\,dx = \frac{1}{18}-\frac{1}{9}\ln(5)+\frac{2}{9}\ln(2).$$

Exercice 18.6

Calculer l'intégrale :

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)^2}\,dx.$$

résultat

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)^2}\,dx = \frac{2}{3}-4\ln(2)+2\ln(3).$$

Exercice 18.7

Calculer l'intégrale :

$$\int_2^3 \frac{x}{x^4-1}\,dx.$$

indication

On a $X^4-1=(X-1)(X+1)(X^2+1)$ donc on peut écrire :

$$\frac{X}{X^4-1}=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{X+1}+\frac{cX+d}{X^2+1}.$$

résultat

$$\int_2^3 \frac{x}{x^4-1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(2)-\frac{1}{4}\ln(3).$$

Exercice 18.8

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Soient $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{C}$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On pose :

$$P := \lambda(\mathrm{X} - a_1)^{\alpha_1} \dots (\mathrm{X} - a_p)^{\alpha_p}.$$

1. (a) Donner l'expression de P'.
   (b) Déterminer $\beta_1, \dots, \beta_p \in \mathbb{R}$ tels que :
$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\beta_k}{\mathrm{X} - a_k}.$$
2. On suppose que $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 1$.
   Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{a_k}$.

Exercice 18.9

Soit $n \geqslant 2$.

1. Factoriser le polynôme $1 + \mathrm{X} + \dots + \mathrm{X}^{n-1}$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right)$.

indication

1. Remarquer que $(\mathrm{X} - 1)(\mathrm{X}^{n-1} + \dots + \mathrm{X} + 1) = \mathrm{X}^n - 1$.
2. Évaluer la factorisation en $\mathrm{X} = 1$ et factoriser par l'angle moitié.
3. Évaluer la factorisation en $\mathrm{X} = \mathrm{e}^{-2i\theta}$ et factoriser par l'angle moitié.

résultat

1. $1 + \mathrm{X} + \dots + \mathrm{X}^{n-1} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(X - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$.
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.
3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right) = \frac{\sin(n\theta)}{2^{n-1}}$.

Exercice 18.10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$.
On note $P := \mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_1\mathrm{X} + a_0$.
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P. Montrer que :

$$|\alpha| \leqslant 1 + \max_{k \in [\![0,n-1]\!]} |a_k|.$$

indication

Distinguer deux cas.

- Cas où $|\alpha| \leqslant 1$.
- Cas où $|\alpha| > 1$. Écrire la relation $\alpha^n = -a_{n-1}\alpha^{n-1} - \cdots - a_0$, prendre le module, à l'aide d'une majoration et d'un calcul de somme géométrique, obtenir :

$$|\alpha|^n \leqslant \frac{|\alpha|^n - 1}{|\alpha| - 1} \times \max_{k \in [\![0,n-1]\!]} |a_k|,$$

  puis majorer $|\alpha|^n - 1$ par $|\alpha|^n$.

Exercice 18.11

Soit $n \geqslant 2$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$.
Montrer que le polynôme

$$P := \mathrm{X}^n + a\mathrm{X} + b$$

a au plus trois racines réelles distinctes.

indication

Utiliser le théorème de Rolle et les dérivées de P.

Exercice 18.12

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que :

$$\mathrm{X}^a - 1 \,\Big|\, \mathrm{X}^b - 1 \quad \iff \quad a \,|\, b.$$

indication

- Utiliser la formule de Bernoulli pour montrer que $\forall p, q \in \mathbb{N}^*,\ X^p - 1 \,|\, X^{pq} - 1$.
- Construire le couple (Q, R) de division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ de $X^a - 1$ par $X^b - 1$ à l'aide du couple (q, r) de division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ de a par b.

Exercice 18.13

Déterminer les triplets (a, b, c) de complexes de module 1 tels que :

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ abc = 1. \end{cases}$$

indication

Remarquer que, comme $a, b, c \in \mathbb{U}$, on a :

$$1 = \overline{a+b+c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab+ac+bc}{abc} = ab+ac+bc,$$

puis se ramener aux relations coefficients racines avec le polynôme $X^3 - X^2 + X - 1$.

résultat

$$(a,b,c) \in \Big\{(1,\mathrm{i},-\mathrm{i}), (1,-\mathrm{i},\mathrm{i}), (\mathrm{i},1,-\mathrm{i}), (\mathrm{i},-\mathrm{i},1), (-\mathrm{i},1,\mathrm{i}), (-\mathrm{i},\mathrm{i},1)\Big\}.$$

Exercice 18.14

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.
Montrer que le polynôme

$$P_n := X^n - X + 1$$

n'admet que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

indication

Raisonner par l'absurde et utiliser la caractérisation des racines multiples par les dérivées.
En se donnant $a \in \mathbb{C}$ une racine multiple de P, on peut montrer que $a = \dfrac{n}{n-1}$ mais :

$$P_n{}'\left(\frac{n}{n-1}\right) > n - 1 > 0.$$

Exercice 18.15

Soit $P := a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$.

1. Soit $r > 0$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$\int_0^{2\pi} P(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t.$$

2. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \big|P(z)\big| \leqslant M.$$

Montrer que P est constant.

indication

1. Calculer, pour $\ell \in \mathbb{Z}$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell t}\,\mathrm{d}t$.

2. Utiliser l'inégalité triangulaire intégrale ($\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$) et passer à la limite pour montrer que les a_k pour $k \geqslant 1$ sont nuls.

résultat

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} P\big(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\big)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 2\pi a_k r^k & \text{si } k \in [\![0,n]\!] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 18.16

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme T_n vérifiant :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{T}_n\big(\cos(\theta)\big) = \cos(n\theta). \qquad (\star)$$

2. Déterminer une relation entre T_n, T_{n+1} et T_{n+2}.

3. Déterminer une équation différentielle vérifiée par T_n.

4. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer ${\mathrm{T}_n}^{(k)}(1)$ et ${\mathrm{T}_n}^{(k)}(-1)$.

indication

1. Pour l'existence, montrer que $\cos(n\theta)$ est un polynôme en $\cos(\theta)$.

2. Exprimer $\cos(n\theta)$ et $\cos\big((n+2)\theta\big)$ en fonction de $\cos\big((n+1)\theta\big)$, $\cos(\theta)$, $\sin\big((n+1)\theta\big)$ et $\sin(\theta)$.

3. Dériver deux fois en θ la relation définissant T_n.

4. Dériver k fois en θ la relation définissant T_n.

résultat

2. $\mathrm{T}_{n+2} + \mathrm{T}_n = 2\mathrm{X}\,\mathrm{T}_{n+1}$.

3. $(1 - \mathrm{X}^2){\mathrm{T}_n}'' - \mathrm{X}\,{\mathrm{T}_n}' + n^2\mathrm{T}_n = 0$.

4. $${\mathrm{T}_n}^{(k)}(1) = \begin{cases} \dfrac{2^k k!(n-1)!(n+k-1)!}{(2k)!(n-k)!} & \text{si} \quad k \leqslant n \\ 0 & \text{si} \quad k > n \end{cases}$$

et ${\mathrm{T}_n}^{(k)}(-1) = (-1)^{n-k}{\mathrm{T}_n}^{(k)}(1)$.