Lycée Chateaubriand
MPSI 1 • 2025 – 2026

William GREGORY

Colle 19

Développements limités

- Après votre colle, vous êtes invité à reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Vous pouvez me rendre ce travail en le donnant à vos camarades m'ayant en colle la semaine prochaine, ou en le déposant à l'accueil du lycée.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Exercice 19.1

Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Calculer :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - \frac{f(x)-f(0)}{x}}{x}.$$

Exercice 19.2

Soit $p \in]0, 1[$. Soit $t \in \mathbb{R}$.

Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{p}{n} e^{i\frac{t}{n}}}{1 - \left(1 - \frac{p}{n}\right) e^{i\frac{t}{n}}}$.

Exercice 19.3

On considère la fonction :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le développement limité à l'ordre n de f en 0.

Exercice 19.4

Déterminer $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\pi}{2 \tanh(\pi \sqrt{\varepsilon}) \sqrt{\varepsilon}} - \frac{1}{2\varepsilon}$.

Exercice 19.5

Soit $a > 0$.

Calculer $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{x^a - a^x}{\arctan(x) - \arctan(a)}$.

Exercice 19.6

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Donner le développement limité en 0 à l'ordre $2n + 2$ de $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

Exercice 19.7

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Donner le développement limité en 0 à l'ordre n de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

Exercice 19.8

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Donner le développement limité en 0 à l'ordre $2n + 2$ de $\arcsin(\cdot)$.

Exercice 19.9

On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{H}_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. **(a)** Montrer que :

$$\forall k \geqslant 2, \quad \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k-1}.$$

(b) Soit $n \geqslant 2$. Montrer que :

$$\mathrm{I}_n + \frac{1}{n} \leqslant \mathrm{H}_n \leqslant 1 + \mathrm{I}_n, \qquad \text{où } \mathrm{I}_n := \int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

2. Montrer que la suite $(\mathrm{H}_n)_{n\geqslant 1}$ diverge.

3. Donner un équivalent simple de H_n.

4. Soit $(\delta_n)_n$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{H}_n = \ln(n) + \delta_n$.

(a) Montrer que $(\delta_n)_n$ est décroissante et minorée.

(b) En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{H}_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.