William GREGORY

Colle 19 • INDICATIONS
Développements limités

Exercice 19.1

Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Calculer :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - \frac{f(x)-f(0)}{x}}{x}.$$

indication

Écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour f et à l'ordre 1 pour f'.

résultat

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - \frac{f(x)-f(0)}{x}}{x} = \frac{f''(0)}{2}.$$

Exercice 19.2

Soit $p \in]0,1[$. Soit $t \in \mathbb{R}$.

Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{p}{n}e^{i\frac{t}{n}}}{1 - \left(1 - \frac{p}{n}\right)e^{i\frac{t}{n}}}$.

indication

On fera un développement limité des exponentielles.

résultat

$$\frac{\frac{p}{n}e^{i\frac{t}{n}}}{1 - \left(1 - \frac{p}{n}\right)e^{i\frac{t}{n}}} \longrightarrow \frac{p}{p - it}.$$

Exercice 19.3

On considère la fonction :

$$f : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le développement limité à l'ordre n de f en 0.

indication

1. On montrera que f est de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ en étudiant $f^{(k)}$ en 0.
2. On peut alors appliquer la formule de Taylor-Young.

Exercice 19.4

Déterminer $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\pi}{2\tanh(\pi\sqrt{\varepsilon})\sqrt{\varepsilon}} - \frac{1}{2\varepsilon}$.

indication

On fera un développement limité à l'ordre 3 de $\cosh(x)$ et $\sinh(x)$ en 0.

résultat

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\pi \coth\left(\pi\sqrt{\varepsilon}\right)}{2\sqrt{\varepsilon}} - \frac{1}{2\varepsilon} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 19.5

Soit $a > 0$.

Calculer $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{x^a - a^x}{\arctan(x) - \arctan(a)}$.

indication

- Pour $a \neq 1$, déterminer un équivalent de $x^a - a^x$ à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 en a.
- Déterminer de même un équivalent de $\arctan(x) - \arctan(a)$ à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 en a.

résultat

$$\lim_{x \to a} \frac{x^a - a^x}{\arctan(x) - \arctan(a)} = \begin{cases} a^a(1+a^2)\big(1 - \ln(a)\big) & \text{si} \quad a \neq 1 \\ 2 & \text{si} \quad a = 1. \end{cases}$$

Exercice 19.6

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Donner le développement limité en 0 à l'ordre $2n+2$ de $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

indication

On pourra commencer par dériver la fonction proposée.

résultat

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \cdots + \frac{2}{2n+1}x^{2n+1} + \underset{x \to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right).$$

Exercice 19.7

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Donner le développement limité en 0 à l'ordre n de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

résultat

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\binom{2k}{k} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

Exercice 19.8

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Donner le développement limité en 0 à l'ordre $2n+2$ de $\arcsin(\cdot)$.

indication

Donner le développement limité en 0 à l'ordre $2n+1$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ puis intégrer.

résultat

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right) \quad \text{et}$$
$$\arcsin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^{2k}(2k+1)(k!)^2} x^{2k+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right).$$

Exercice 19.9

On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{H}_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. **(a)** Montrer que :
$$\forall k \geqslant 2, \quad \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k-1}.$$

(b) Soit $n \geqslant 2$. Montrer que :
$$\mathrm{I}_n + \frac{1}{n} \leqslant \mathrm{H}_n \leqslant 1 + \mathrm{I}_n, \qquad \text{où } \mathrm{I}_n := \int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

2. Montrer que la suite $(\mathrm{H}_n)_{n\geqslant 1}$ diverge.

3. Donner un équivalent simple de H_n.

4. Soit $(\delta_n)_n$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{H}_n = \ln(n) + \delta_n$.

(a) Montrer que $(\delta_n)_n$ est décroissante et minorée.

(b) En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{H}_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

indication

1. **(a)** Utiliser la décroissance de $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ sur le segment $[k, k+1]$, et la croissance de l'intégrale sur ce même segment (de longueur 1).

   (b) Sommer les inégalités obtenues, en faisant bien attention aux bornes.

2. Utiliser la minoration de H_n fournie par la question précédente.

3. Montrer que $\dfrac{\mathrm{H}_n}{\ln(n)} \longrightarrow 1$ à l'aide de l'encadrement.

4. **(a)** Le caractère minoré vient de l'encadrement. Pour montrer que $(\delta_n)_n$ est décroissante, on pourra notamment utiliser que :
$$\forall t > -1, \quad \ln(1+t) \leqslant t.$$

   (b) En déduire que $(\delta_n)_n$ converge et noter γ sa limite.