Lycée Chateaubriand William GREGORY
MPSI 1 • 2025 – 2026

Colle 20

Espaces vectoriels

- Après votre colle, vous êtes invité à reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Vous pouvez me rendre ce travail en le donnant à vos camarades m'ayant en colle la semaine prochaine, ou en le déposant à l'accueil du lycée.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Exercice 20.1

La famille
$$(\mathrm{X}^3 + X, \mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X} + 1, \mathrm{X} - 1, 4)$$
est-elle une base de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$?

Exercice 20.2

La famille
$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$
est-elle libre ou liée ?

Exercice 20.3

Soit $A \subset \mathbb{R}$ telle que :
$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & 0 \in A \\ \text{(ii)} & \forall x, y \in A, \quad x + y \in A \\ \text{(iii)} & \forall \alpha \in \mathbb{Q}, \quad \forall x \in A, \quad \alpha x \in A. \end{array}$$
On définit :
$$\mathrm{Adh}(A) := \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}} : \; a_n \longrightarrow x \right\}.$$
Montrer que $\mathrm{Adh}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$.

Exercice 20.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère les sous-ensembles de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$:

- $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques ;
- $\mathrm{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

Montrer que $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 20.5

Soit E un espace vectoriel. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
Soit $(x_1, \ldots, x_{k+1})$ une famille de E telle que la famille $(x_1, \ldots, x_k)$ est libre.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur x_{k+1} pour que la famille $(x_1, \ldots, x_{k+1})$ soit libre.

Exercice 20.6

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :
$$\mathrm{Vect}\Big(x \longmapsto \cos(nx)\Big)_{n\in[\![0,N]\!]} = \mathrm{Vect}\Big(x \longmapsto \cos^n(x)\Big)_{n\in[\![0,N]\!]}.$$

Exercice 20.7

On note $E := \mathscr{C}^0\Big([0,1],\mathbb{R}\Big)$ et
$$F := \left\{ f \in E \;\middle|\; \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}.$$

1. Montrer que F est un espace vectoriel.

2. Déterminer un supplémentaire de F dans E.

Exercice 20.8

Soit E un espace vectoriel.
Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de E.
Montrer que pour tout $a \in E \setminus \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, la famille $(e_1 + a, \dots, e_p + a)$ est libre.

Exercice 20.9

On considère les fonctions de $\mathscr{C}^0([0,2\pi],\mathbb{R})$:
$$f_1 : x \longmapsto \cos(x), \quad f_2 : x \longmapsto x\cos(x),$$
$$f_3 : x \longmapsto \sin(x), \quad f_4 : x \longmapsto x\sin(x).$$
Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre dans $\mathscr{C}^0([0,2\pi],\mathbb{R})$.

Exercice 20.10

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts.
Montrer que la famille $\Big(t \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda_k t}\Big)_{1\leqslant k\leqslant N}$ est libre dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 20.11

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On note, pour $j \in [\![0, N+1]\!]$, $\mathrm{x}_j^{(N)} := \dfrac{j}{N+1}$.
On note $\mathscr{V}_N$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$, nulles en 0 et en 1, et affines sur les segments $\Big[\mathrm{x}_j^{(N)}, \mathrm{x}_{j+1}^{(N)}\Big]$ (pour $j \in [\![0, N]\!]$).

1. Vérifier que $\mathscr{V}_N$ est un espace vectoriel.

2. Soit $j \in [\![1, N]\!]$. Exprimer explicitement l'unique fonction $\mathrm{f}_j^{(N)}$ de $\mathscr{V}_N$ telle que :
$$\forall \ell \in [\![1, N]\!], \quad \mathrm{f}_j^{(N)}\Big(\mathrm{x}_\ell^{(N)}\Big) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{si} & \ell \neq j \\ 1 & \text{si} & \ell = j. \end{array} \right.$$

3. Montrer que $\Big(\mathrm{f}_1^{(N)}, \dots, \mathrm{f}_N^{(N)}\Big)$ forme une base de $\mathscr{V}_N$.

Exercice 20.12

On considère $(\mathrm{p}_n)_{n\geqslant 1}$ la suite strictement croissante des nombres premiers :
$$\mathrm{p}_1 = 2, \quad \mathrm{p}_2 = 3, \quad \mathrm{p}_3 = 5, \quad \mathrm{p}_4 = 7, \quad \dots$$
Montrer que $\Big(\ln(\mathrm{p}_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille libre dans $\mathbb{R}$ muni de sa structure de $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.