Colle 21

Espaces vectoriels de dimension finie

- Après votre colle, vous êtes invité à reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Vous pouvez me rendre ce travail en le donnant à vos camarades m'ayant en colle la semaine prochaine, ou en le déposant à l'accueil du lycée.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Exercice 21.1

1. Montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est de dimension infinie.

2. Donner un exemple (non trivial) de sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de dimension finie.

Exercice 21.2

1. Montrer que $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie.

2. Donner un exemple (non trivial) de sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ de dimension finie.

Exercice 21.3

1. Montrer que $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est de dimension infinie.

2. Donner un exemple (non trivial) de sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de dimension finie.

Exercice 21.4

Déterminer les sous-algèbres de dimension finie de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 21.5

Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on considère :

$$\mathrm{f}_1 : x \longmapsto \sin^2(x), \qquad \mathrm{f}_2 : x \longmapsto \cos^2(x), \qquad \mathrm{f}_3 : x \longmapsto \sin(2x),$$
$$\mathrm{f}_4 : x \longmapsto \cos(2x), \qquad \mathrm{f}_5 : x \longmapsto \sin(x)\cos(x).$$

Déterminer $\mathrm{rg}(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4, \mathrm{f}_5)$.

Exercice 21.6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{A}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et déterminer leur dimension.

Exercice 21.7

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On définit, pour $k \in [\![0, n]\!]$, le polynôme
$$\mathrm{P}_k := \mathrm{X}^k(1-\mathrm{X})^{n-k}.$$

1. Montrer que $(\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
2. Donner les coordonnées de $P \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ dans cette base.

Exercice 21.8

On considère l'ensemble :
$$\mathrm{F} := \left\{P \in \mathbb{C}_4[\mathrm{X}] \;\middle|\; P(0) = P(1) = 0\right\}.$$

1. Montrer que F est un espace vectoriel de dimension finie.
2. Déterminer la dimension de F.
3. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{C}_4[\mathrm{X}]$.

Exercice 21.9

On considère l'ensemble E des suites $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$
où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b \neq 0$.
Déterminer une base et la dimension de E.

Exercice 21.10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ des nombres distincts. On définit $A := \mathrm{Diag}(a_1, \dots, a_n)$.
On considère l'ensemble :
$$\mathrm{C}(A) := \left\{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \;\middle|\; AM = MA\right\}.$$
Montrer que $(\mathrm{I}_n, A, \dots, A^{n-1})$ est une base de $\mathrm{C}(A)$.