William GREGORY

Colle 21 • INDICATIONS
Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 21.1

1. Montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est de dimension infinie.
2. Donner un exemple (non trivial) de sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de dimension finie.

indication

On peut montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\delta^{(k)})_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ où $\delta^{(k)}$ est la suite dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient de position k valant 1.

Exercice 21.2

1. Montrer que $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie.
2. Donner un exemple (non trivial) de sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ de dimension finie.

indication

On peut montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\delta^{(k)})_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ où $\delta^{(k)}$ est la suite dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient de position k valant 1.

Exercice 21.3

1. Montrer que $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est de dimension infinie.
2. Donner un exemple (non trivial) de sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de dimension finie.

indication

On peut montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x \longmapsto x^k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 21.4

Déterminer les sous-algèbres de dimension finie de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 21.5

Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on considère :

$$\mathrm{f}_1 : x \longmapsto \sin^2(x),\quad \mathrm{f}_2 : x \longmapsto \cos^2(x),\quad \mathrm{f}_3 : x \longmapsto \sin(2x),$$
$$\mathrm{f}_4 : x \longmapsto \cos(2x),\quad \mathrm{f}_5 : x \longmapsto \sin(x)\cos(x).$$

Déterminer $\mathrm{rg}(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4, \mathrm{f}_5)$.

indication

Utiliser les formules trigonométriques pour montrer que $\mathrm{rg}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) \leqslant 3$ et évaluer en des x bien choisis.

résultat

$$\mathrm{rg}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) = 3.$$

Exercice 21.6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que les sous-espaces vectoriels $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $M_n(\mathbb{K})$ et déterminer leur dimension.

indication

Plusieurs méthodes :

- Montrer que les espaces sont supplémentaires sans utiliser la dimension, puis déterminer leur dimension.
- Déterminer une base des deux espaces (donc en déduire leur dimension) puis montrer qu'ils sont d'intersection nulle.

résultat

$$\dim\big(S_n(\mathbb{K})\big) = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \dim\big(A_n(\mathbb{K})\big) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Exercice 21.7

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On définit, pour $k \in [\![0, n]\!]$, le polynôme
$$P_k := X^k(1-X)^{n-k}.$$

1. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Donner les coordonnées de $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

indication

1. La famille étant de taille $n+1$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension $n+1$, il suffit de montrer que la famille est libre.
En écrivant $\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_n P_n = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$, on évalue en 0 puis on peut simplifier par X, et en recommence.

2. Terrible astuce : $X^k = X^k\big(X + (1-X)\big)^{n-k}$, puis on applique la formule du binôme de Newton.

résultat

2. $X^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} P_{k+j}$.

Exercice 21.8

On considère l'ensemble :

$$\mathrm{F} := \left\{ P \in \mathbb{C}_4[\mathrm{X}] \;\middle|\; P(0) = P(1) = 0 \right\}.$$

1. Montrer que F est un espace vectoriel de dimension finie.

2. Déterminer la dimension de F.

3. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{C}_4[\mathrm{X}]$.

indication

1. On peut le vérifier directement, tout comme on peut montrer qu'il s'agit d'une intersection de deux hyperplans.

2. On écrit $P = a_0 + a_1\mathrm{X} + \cdots + a_4\mathrm{X}^4$.
En supposant $P \in \mathrm{F}$, on égalise à 0 et on obtient $a_0 = 0$ et $a_4 = -(a_1 + a_2 + a_3)$.
On en déduit que $P \in \mathrm{Vect}(\mathrm{X} - \mathrm{X}^4, \mathrm{X}^2 - \mathrm{X}^4, \mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^4)$.
On vérifie ensuite que la famille $(\mathrm{X} - \mathrm{X}^4, \mathrm{X}^2 - \mathrm{X}^4, \mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^4)$ est libre.

3. On cherche un espace de dimension 2. On peut partir d'une base de $\mathbb{C}_4[\mathrm{X}]$ adaptée à F.

Exercice 21.9

On considère l'ensemble E des suites $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b \neq 0$.
Déterminer une base et la dimension de E.

indication

On considère le discriminant Δ de l'équation caractéristique $r^2 = ar + b$, et on distingue les cas selon le signe de Δ, en utilisant le cours sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Exercice 21.10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ des nombres distincts. On définit $A := \mathrm{Diag}(a_1, \dots, a_n)$.
On considère l'ensemble :

$$\mathrm{C}(A) := \left\{ M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \;\middle|\; AM = MA \right\}.$$

Montrer que $(\mathrm{I}_n, A, \dots, A^{n-1})$ est une base de $\mathrm{C}(A)$.

indication

On note $\mathrm{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

- L'égalité $AM = MA$ permet de justifier que $\mathrm{C}(A) = \mathrm{D}_n(\mathbb{K})$, donc $\mathrm{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de dimension n.
- Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $A^k \in \mathrm{C}(A)$.
- Il reste à montrer que la famille est libre. En écrivant :

$$\lambda_0 \mathrm{I}_n + \lambda_1 A + \cdots + \lambda_{n-1} A^{n-1} = 0_n,$$

on obtient :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \lambda_0 + \lambda_1 a_k + \cdots + \lambda_{n-1} {a_k}^{n-1} = 0.$$

On peut considérer le polynôme $P \coloneqq \lambda_0 + \lambda_1 \mathrm{X} + \cdots + \lambda_{n-1} \mathrm{X}^{n-1}$.