Colle 22

Intégration

- Après votre colle, vous êtes invité à reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Vous pouvez me rendre ce travail en le donnant à vos camarades m'ayant en colle la semaine prochaine, ou en le déposant à l'accueil du lycée.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Exercice 22.1

Calculer la limite de la suite de terme général :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \mathrm{e}^{-\frac{k}{n}}.$$

Exercice 22.2

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{B}_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{np} f\left(\frac{k}{n}\right) \mathrm{e}^{-\frac{k-1}{n}}$.

Montrer que $\mathrm{B}_n \longrightarrow \int_0^p f(t) \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$.

Exercice 22.3

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $T > 0$. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue T-périodique. Montrer que :
$$\forall a \in I, \quad \int_a^{a+T} f(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^T f(t) \, \mathrm{d}t.$$

Exercice 22.4

On considère la fonction :
$$H : \left| \begin{array}{rcl}]1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} \, \mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

1. Montrer que H est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer sa dérivée.

2. **(a)** On considère la fonction $u : x \longmapsto \frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1}$ définie sur $]1, +\infty[$.
Montrer que u admet une limite finie en 1.

(b) En déduire la limite en 1^+ de H.

Exercice 22.5

Soit $f \in \mathscr{C}^0\Big([0,1],\mathbb{R}\Big)$ telle que :
$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$
Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 22.6

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$.
Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. On considère :
$$\Psi_f : \left| \begin{array}{rcl} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)\sin(tx)\,\mathrm{d}t. \end{array} \right.$$
Montrer que Ψ_f est lipschitzienne.

Exercice 22.7

Soit $g \in \mathscr{C}^2\Big([0,1],\mathbb{R}\Big)$.

1. Montrer que :
$$\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{g(0)+g(1)}{2} + \int_0^1 \frac{t(t-1)}{2} g''(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. On suppose que $g'' \leqslant 0$. Montrer que :
$$0 \leqslant \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t - \frac{g(0)+g(1)}{2} \leqslant \frac{g'(0)-g'(1)}{8}.$$

Exercice 22.8

Soit $f \in \mathscr{C}^2\Big([0,1],\mathbb{R}\Big)$ telle que $f(0) = f(1) = 0$.
Montrer que :
$$\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \frac{1}{120}\int_0^1 f''(t)^2\,\mathrm{d}t.$$