

## Colle 22 • INDICATIONS

### Intégration

#### Exercice 22.1

Calculer la limite de la suite de terme général :

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} e^{-\frac{k}{n}}.$$

*indication*

Utiliser le théorème des sommes de Riemann sur  $[0, 1]$ .

*résultat*

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} e^{-\frac{k}{n}} \longrightarrow 1 - \frac{2}{e}.$$

#### Exercice 22.2

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue bornée. Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $B_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{np} f\left(\frac{k}{n}\right) e^{-\frac{k-1}{n}}$ .

Montrer que  $B_n \rightarrow \int_0^p f(t) e^{-t} dt$ .

#### Exercice 22.3

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Soit  $T > 0$ . Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue  $T$ -périodique.

Montrer que :

$$\forall a \in I, \int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt.$$

## Exercice 22.4

On considère la fonction :

$$H : \begin{cases} ]1, +\infty[ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt. \end{cases}$$

1. Montrer que  $H$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et calculer sa dérivée.
2. (a) On considère la fonction  $u : x \mapsto \frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1}$  définie sur  $]1, +\infty[$ .  
Montrer que  $u$  admet une limite finie en 1.  
(b) En déduire la limite en  $1^+$  de  $H$ .

### indication

1. Utiliser le théorème fondamental de l'analyse.
2. (a) Poser  $x = 1 + h$  et étudier, avec des développements limités, le quotient  $\frac{h - \ln(1+h)}{h \ln(1+h)}$ .  
(b) Il faut faire apparaître  $u : H(x) = \int_x^{x^2} u(t) dt + \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1} dt$ .  
On utilise le prolongement par continuité de  $u$  en 1 pour montrer que  $\int_x^{x^2} u(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} 0$ .

### résultat

1.  $H' : x \mapsto \frac{x-1}{\ln(x)}$ .
2. (a)  $\lim_{x \rightarrow 1} u(x) = \frac{1}{2}$ .  
(b)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} H(x) = \ln(2)$ .

## Exercice 22.5

Soit  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  telle que :

$$\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}.$$

Montrer que  $f$  admet un point fixe.

### indication

On veut montrer que  $g : x \mapsto f(x) - x$  s'annule. Pour cela, on va calculer  $\int_0^1 g(t) dt$ , puis raisonner par l'absurde et aboutir à une contradiction avec la continuité de  $g$  et le théorème de positivité stricte de l'intégrale.

### Exercice 22.6

Soit  $[a, b]$  un segment de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $[a, b]$ . On considère :

$$\Psi_f : \begin{cases} [a, b] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \int_a^b f(t) \sin(tx) dt. \end{cases}$$

Montrer que  $\Psi_f$  est lipschitzienne.

#### indication

Utiliser l'inégalité, la lipschitzianité de  $\sin(\cdot)$ , la continuité par morceaux de  $f$  pour borner  $|f(t)|$  (maximum des majorants donnés par le théorème des bornes atteintes), et terminer par le calcul de  $\int_a^b |t| dt$  (ou expliquer qu'il s'agit d'une constante ne dépendant pas de  $x$ ).

### Exercice 22.7

Soit  $g \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ .

1. Montrer que :

$$\int_0^1 g(t) dt = \frac{g(0) + g(1)}{2} + \int_0^1 \frac{t(t-1)}{2} g''(t) dt.$$

2. On suppose que  $g'' \leq 0$ . Montrer que :

$$0 \leq \int_0^1 g(t) dt - \frac{g(0) + g(1)}{2} \leq \frac{g'(0) - g'(1)}{8}.$$

#### indication

1. Procéder par intégrations par parties.

Pour rendre le calcul moins difficile, on peut remarquer que  $1 = \varphi''(t)$  où  $\varphi(t) = \frac{t(t-1)}{2}$ . La fonction  $\varphi'$  est une primitive de  $t \mapsto 1$  centrée (i.e.  $\int_0^1 \varphi'(t) dt = 0$ ).

2. On commencera par déterminer le minimum de  $t \mapsto t(t-1)$ .

### Exercice 22.8

Soit  $f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$  telle que  $f(0) = f(1) = 0$ .

Montrer que :

$$\left( \int_0^1 f(t) dt \right)^2 \leq \frac{1}{120} \int_0^1 f''(t)^2 dt.$$

#### indication

Par double intégration par parties, obtenir que

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \frac{t^2 - t}{2} f''(t) dt$$

puis majorer cette intégrale par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.