

Colle 23 • INDICATIONS

Dénombrement

La majorité des exercices sont issus :

- ◆ du cahier de calcul pour la classe de Terminale (<https://colasbd.github.io/cdc-lycee/>);
- ◆ du cahier de gammes en combinatoire (<https://colasbd.github.io/autres-documents/>).

Exercice 23.1

Dans un ensemble de dix personnes dont trois garçons, on s'intéresse à un groupe d'amis comportant six personnes.

Déterminer le nombre de groupes :

1. possibles ;
2. ne comportant pas de garçon ;
3. comportant au moins un garçon ;
4. comportant autant de garçons que de fille.

indication

(issu du Cahier de calcul T^{ale} disponible à l'adresse <https://colasbd.github.io/cdc-lycee/>)

résultat

1. $\binom{10}{6} = 210.$

2. 7.

3. $\binom{10}{6} - 7 = 203.$

4. $\binom{3}{3} \times \binom{7}{3} = 35.$

Exercice 23.2

On s'intéresse aux anagrammes du mot « FICHE », qu'elles aient un sens, ou non.

Combien d'anagrammes peut-on former :

1. en tout ?
2. si l'on commence par les voyelles ?
3. si le mot se termine par un « E » ?
4. si l'on souhaite qu'il y ait une alternance entre les voyelles et les consonnes ?

indication

(issu du Cahier de calcul T^{ale} disponible à l'adresse <https://colasbd.github.io/cdc-lycee/>)

résultat

1. $5! = 120$.
2. $2! \times 3! = 12$.
3. $4! = 24$.
4. $3 \times 2 \times 2 = 12$.

Exercice 23.3

Au poker, un *brelan* est une main de cinq cartes, dont trois sont de même hauteur, et les deux autres différentes. Par exemple, trois « rois », un « 7 » et un « 2 » forment un brelan.

Avec un jeu de 52 cartes, combien de brelans peut-on former ?

indication

(issu du Cahier de calcul T^{ale} disponible à l'adresse <https://colasbd.github.io/cdc-lycee/>)

résultat

$$\binom{13}{1} \times \binom{4}{3} \times \binom{12}{2} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} = 54\,912.$$

Exercice 23.4

Soit $n \geq 2$. On considère n points A_1, \dots, A_n deux à deux distincts.

Combien peut-on tracer de segments (non réduits à un point) dont les extrémités sont parmi ces points ?

indication

(issu du Cahier de calcul T^{ale} disponible à l'adresse <https://colasbd.github.io/cdc-lycee/>)

résultat

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Exercice 23.5

Soit $n \geq 3$. On considère un polygone régulier à n sommets, c'est-à-dire un polygone dont tous les côtés et tous les angles sont égaux.

Combien ce polygone possède-t-il de diagonales ?

indication

(issu du Cahier de calcul T^{ale} disponible à l'adresse <https://colasbd.github.io/cdc-lycee/>)

résultat

$$\frac{n(n-3)}{2}.$$

Exercice 23.6

Un groupe de sept amis part en week-end.

Déterminer le nombre de façons de choisir un responsable de la vaisselle, un responsable du rangement et un responsable du ménage :

1. si aucun membre ne peut cumuler plusieurs fonctions ;
2. si un même membre peut cumuler plusieurs fonctions ;
3. si un même membre ne peut cumuler au plus que deux fonctions.

indication

(issu du Cahier de calcul T^{ale} disponible à l'adresse <https://colasbd.github.io/cdc-lycee/>)

résultat

1. $7 \times 6 \times 5 = 210$.
2. $7^3 = 343$.
3. $7^3 - 7 = 336$.

Exercice 23.7

Un cadenas est sécurisé par un code à quatre chiffres.

Calculer le nombre de codes :

1. en tout ;
2. avec des chiffres tous différents ;
3. avec des chiffres pairs uniquement ;
4. se terminant par le chiffre « 9 » ;
5. avec des chiffres tous différents et rangés dans l'ordre croissant.

indication

(issu du Cahier de calcul T^{ale} disponible à l'adresse <https://colasbd.github.io/cdc-lycee/>)

résultat

1. $10^4 = 10\,000$.
2. $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\,040$.
3. $5^4 = 625$.
4. $10^3 = 1\,000$.
5. $\binom{10}{4} = 210$.

Exercice 23.8

Douze personnes constituent une association et doivent choisir un bureau, composé d'un président, d'un trésorier et d'un secrétaire.

Déterminer le nombre de bureaux :

1. possibles ;
2. sachant que Pierre et Jean ne veulent pas siéger ensemble ;
3. ne contenant pas les deux personnes les plus jeunes du groupe ;
4. contenant le doyen et la personne la plus jeune du groupe.

indication

(issu du Cahier de calcul T^{ale} disponible à l'adresse <https://colasbd.github.io/cdc-lycee/>)

résultat

1. $12 \times 11 \times 10 = 1\,320$.
2. $12 \times 11 \times 10 - 3 \times 2 \times 10 = 1\,260$.
3. $10 \times 9 \times 8 = 720$.
4. $3 \times 2 \times 10 = 60$.

Exercice 23.9

On dispose de cinq pantalons différents que l'on veut ranger dans un meuble à trois tiroirs.

Déterminer le nombre de façons de ranger ces pantalons :

1. en tout ;
2. de sorte que tous les pantalons soient dans le même tiroir ;
3. de sorte qu'un seul tiroir soit vide ;
4. de sorte qu'aucun tiroir ne reste vide.

indication

(issu du Cahier de calcul T^{ale} disponible à l'adresse <https://colasbd.github.io/cdc-lycee/>)

résultat

1. $3^5 = 243$.
2. 3.
3. $3 \times (2^5 - 2) = 90$.
4. $3^5 - 3 \times (2^5 - 2) - 3 = 150$.

Exercice 23.10

Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

Combien y a-t-il de nombres :

1. à au plus r chiffres ?
2. à r chiffres exactement ?

indication

(issu du cahier de gammes en combinatoire, disponible à l'adresse <https://colasbd.github.io/autres-documents/>)

résultat

1. 10^r .
2. $9 \times 10^{r-1}$.

Exercice 23.11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$.

Combien d'applications $f : \llbracket 1, n \rrbracket \longrightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ telles que $f(1) = f(2)$ peut-on construire ?

indication

(issu du cahier de gammes en combinatoire, disponible à l'adresse <https://colasbd.github.io/autres-documents/>)

On peut calculer le cardinal de $\{f : \llbracket 1, n \rrbracket \longrightarrow \llbracket 1, n \rrbracket \mid f(1) = f(2)\}$ ou de son complémentaire $\{f : \llbracket 1, n \rrbracket \longrightarrow \llbracket 1, n \rrbracket \mid f(1) \neq f(2)\}$, en comptant, pour chaque $f(k)$ le nombre de choix possibles.

résultat

$$\left| \left\{ f : \llbracket 1, n \rrbracket \longrightarrow \llbracket 1, n \rrbracket \mid f(1) = f(2) \right\} \right| = n^{n-1}.$$

Exercice 23.12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$.

Combien d'applications $f : \llbracket 1, n \rrbracket \longrightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ bijectives telles que $f(1) = 2$ peut-on construire ?

indication

(issu du cahier de gammes en combinatoire, disponible à l'adresse <https://colasbd.github.io/autres-documents/>)

résultat

$$\left| \left\{ f : \llbracket 1, n \rrbracket \longrightarrow \llbracket 1, n \rrbracket \mid f \text{ est bijective et } f(1) = 2 \right\} \right| = (n-1)!.$$

Exercice 23.13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$.

Combien d'applications $f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ bijectives telles que $f(n) > f(1)$ peut-on construire ?

indication

(issu du cahier de gammes en combinatoire, disponible à l'adresse <https://colasbd.github.io/autres-documents/>)

On peut procéder ainsi pour la construction :

1. On choisit une partie P à deux éléments dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.
2. On pose $f(1) := \min(P)$ et $f(n) := \max(P)$.
3. Il reste à choisir $f(2), \dots, f(n-1)$: ces valeurs définissent une bijection de $\llbracket 2, n-1 \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus P$.

résultat

$$\left| \left\{ f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket \mid f \text{ est bijective et } f(n) > f(1) \right\} \right| = \frac{n!}{2}.$$

Exercice 23.14

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Combien peut-on former de k -uplets $(E_1, \dots, E_k) \in \mathcal{P}(E)^k$ dont les E_i sont deux à deux disjointes ?

indication

(issu du cahier de gammes en combinatoire, disponible à l'adresse <https://colasbd.github.io/autres-documents/>)

résultat

$$(k+1)^n.$$