Colle 24

Probabilités

- Après votre colle, vous êtes invité à reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Vous pouvez me rendre ce travail en le donnant à vos camarades m'ayant en colle la semaine prochaine, ou en le déposant à l'accueil du lycée.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Exercice 24.1

On lance un dé parfait à 5 faces un grand nombre de fois.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité que la somme des résultats obtenus lors des n premiers lancers soit paire.
Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la quantité p_n.

Exercice 24.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements mutuellement indépendants. On note B l'événement « aucun des A_k n'est réalisé ».
Montrer que : $\mathbb{P}(B) \leqslant \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\right)$.

Exercice 24.3

On dispose de 120 pièces dont 40 sont pipées.
Pour chaque pièce pipée, la probabilité d'obtenir FACE est de $\frac{2}{3}$.

1. On tire une pièce au hasard parmi les 120. On lance cette pièce et on obtient FACE.
Quelle est la probabilité que cette pièce soit pipée ?

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire une pièce au hasard parmi les 120.
On lance cette pièce n fois et on obtient n fois FACE.

(a) Quelle est la probabilité p_n que cette pièce soit pipée ?

(b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter le résultat.

Exercice 24.4 Formule du crible de Poincaré.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$ des événements.
Montrer que :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset [\![1,n]\!] \\ |J|=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right).$$

Exercice 24.5 Chaîne de Markov à deux états.

On considère deux états A et B et une particule se déplaçant entre ces deux états.
On note :

- A_n l'événement « la particule est en A à la n-ième étape » ;
- B_n l'événement « la particule est en B à la n-ième étape ».

À l'instant initial ($n = 0$), la particule est en A.
On note $p, q \in]0, 1[$ tels que :

- la probabilité de passer de A à B soit égale à p ;
- la probabilité de passer de B à A soit égale à q.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\mathbb{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{B}_{n+1})$, $\mathbb{P}_{\mathrm{B}_n}(\mathrm{B}_{n+1})$, $\mathbb{P}_{\mathrm{B}_n}(\mathrm{A}_{n+1})$ et $\mathbb{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{A}_{n+1})$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Déterminer $\mathbb{P}(\mathrm{A}_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$.
(b) En déduire une expression de $\mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$ en fonction de n.

3. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, la probabilité $\mathbb{P}(\mathrm{B}_n)$.

4. On suppose que $\left|1 - (p + q)\right| < 1$.
Calculer les limites des suites $\left(\mathbb{P}(\mathrm{A}_n)\right)_n$ et $\left(\mathbb{P}(\mathrm{B}_n)\right)_n$.

Exercice 24.6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une classe de n élèves organise un Noël canadien : chaque élève apporte un cadeau emballé et indistinguable des autres.

1. Déterminer la probabilité p_n qu'au moins un élève reçoive le cadeau qu'il a apporté.

2. Montrer que $p_n \longrightarrow 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Exercice 24.7 Indicatrice d'Euler.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On note p_1, ..., p_r les diviseurs premiers de n.
On choisit de manière équiprobable un entier $k \in [\![1, n]\!]$.
On note les évènements :

- pour $m \in [\![1, n]\!]$, A_m : « m divise k » ;
- B : « k est premier avec n ».

1. Soit m un diviseur de n. Calculer $\mathbb{P}(A_m)$.

2. Calculer $\mathbb{P}(B)$.

3. **Application.**
On note $\varphi(n) := \operatorname{Card}\left\{j \in [\![1, n]\!] \;\middle|\; j \wedge n = 1\right\}$. Montrer que

$$\varphi(n) = n \times \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$