

## Colle 24 • INDICATIONS

### Probabilités

#### Exercice 24.1

On lance un dé parfait à 5 faces un grand nombre de fois.

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $p_n$  la probabilité que la somme des résultats obtenus lors des  $n$  premiers lancers soit paire.

Exprimer, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , la quantité  $p_n$ .

#### indication

- ◆ Calculer  $p_1$ .
- ◆ Exprimer, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p_{n+1}$  en fonction de  $p_n$ .
  - ◇ Poser  $A_n$  l'évènement « avoir une somme paire au  $n$ -ième lancer ».
  - ◇ Utiliser la formule des probabilités totales dans le S.C.E.  $(A_n, \overline{A_n})$  pour calculer  $\mathbb{P}(A_{n+1})$ .
- ◆ Reconnaître que la suite  $(p_n)_n$  est arithmético-géométrique et en déterminer son terme général.

#### résultat

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{-1}{5} \right)^n + 1 \right).$$

#### Exercice 24.2

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $A_1, \dots, A_n$  des événements mutuellement indépendants. On note  $B$  l'évènement « aucun des  $A_k$  n'est réalisé ».

Montrer que :  $\mathbb{P}(B) \leq \exp\left(-\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)\right)$ .

#### indication

On a, pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $1 - x \leq e^{-x}$ .

### Exercice 24.3

On dispose de 120 pièces dont 40 sont pipées.

Pour chaque pièce pipée, la probabilité d'obtenir FACE est de  $\frac{2}{3}$ .

1. On tire une pièce au hasard parmi les 120. On lance cette pièce et on obtient FACE.  
Quelle est la probabilité que cette pièce soit pipée ?
2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On tire une pièce au hasard parmi les 120.  
On lance cette pièce  $n$  fois et on obtient  $n$  fois FACE.
  - (a) Quelle est la probabilité  $p_n$  que cette pièce soit pipée ?
  - (b) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ . Interpréter le résultat.

#### indication

On note les événements :

$F$  : « obtenir FACE » et  $T$  : « la pièce est truquée ».

1. Utiliser la formule de Bayes pour calculer  $\mathbb{P}_F(T)$ . Pour calculer  $\mathbb{P}(F)$ , utiliser la formule des probabilités totales.
2. On note de plus, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $F_n$  : « obtenir FACE  $n$  fois ».

(a) Utiliser la formule de Bayes :  $p_n = \mathbb{P}_{F_n}(T) = \frac{\mathbb{P}_T(F_n)\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}_T(F_n)\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}_{\bar{T}}(F_n)\mathbb{P}(\bar{T})}$ .

#### résultat

1.  $\mathbb{P}_F(T) = \frac{5}{9}$ .
2.  $p_n = \frac{1}{1 + 2\left(\frac{3}{4}\right)^n} \rightarrow 1$

### Exercice 24.4 Formule du crible de Poincaré.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$  des événements.

Montrer que :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset \llbracket 1, n \rrbracket \\ |J|=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right).$$

#### indication

Raisonnement par récurrence. Il s'agit de généraliser la formule «  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$  ». On peut essayer pour  $n = 3$  et  $n = 4$  pour comprendre.

### Exercice 24.5 Chaîne de Markov à deux états.

On considère deux états A et B et une particule se déplaçant entre ces deux états.

On note :

- ◆  $A_n$  l'événement « la particule est en A à la  $n$ -ième étape » ;
- ◆  $B_n$  l'événement « la particule est en B à la  $n$ -ième étape ».

À l'instant initial ( $n = 0$ ), la particule est en A.

On note  $p, q \in ]0, 1[$  tels que :

- ◆ la probabilité de passer de A à B soit égale à  $p$  ;
- ◆ la probabilité de passer de B à A soit égale à  $q$ .

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer  $\mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1})$ ,  $\mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1})$ ,  $\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1})$  et  $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})$ .

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

- (a) Déterminer  $\mathbb{P}(A_{n+1})$  en fonction de  $\mathbb{P}(A_n)$ .
- (b) En déduire une expression de  $\mathbb{P}(A_n)$  en fonction de  $n$ .

3. Déterminer, pour  $n \in \mathbb{N}$ , la probabilité  $\mathbb{P}(B_n)$ .

4. On suppose que  $|1 - (p + q)| < 1$ .

Calculer les limites des suites  $(\mathbb{P}(A_n))_n$  et  $(\mathbb{P}(B_n))_n$ .

#### indication

1. Utiliser les définitions de  $p$  et  $q$  et le fait que  $(A_{n+1}, B_{n+1})$  forme un S.C.E.
2. (a) Utiliser la formule des probabilités totales.  
(b) En notant  $a_n := \mathbb{P}(A_n)$ , déterminer le terme général de  $(a_n)_n$  dont on a une relation de récurrence.
3. On a  $\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_n) = 1$ .

#### résultat

1.  $\mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) = p$ ,  $\mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) = 1 - q$ ,  $\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) = q$  et  $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = 1 - p$ .
2. (a)  $\mathbb{P}(A_{n+1}) = (1 - p - q)\mathbb{P}(A_n) + q$ .  
(b)  $\mathbb{P}(A_n) = \frac{q}{p+q} + \frac{p}{p+q}(1 - p - q)^n$ .
3.  $\mathbb{P}(B_n) = \frac{p}{p+q} - \frac{p}{p+q}(1 - p - q)^n$ .
4.  $\mathbb{P}(A_n) \longrightarrow \frac{q}{p+q}$  et  $\mathbb{P}(B_n) \longrightarrow \frac{p}{p+q}$ .

### Exercice 24.6

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Une classe de  $n$  élèves organise un Noël canadien : chaque élève apporte un cadeau emballé et indistinguable des autres.

1. Déterminer la probabilité  $p_n$  qu'au moins un élève reçoive le cadeau qu'il a apporté.
2. Montrer que  $p_n \rightarrow 1 - \frac{1}{e}$ .

#### indication

1. La « formule du crible » peut servir :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset \llbracket 1, n \rrbracket \\ |J|=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right).$$

Le calcul de  $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right)$  peut se faire avec la formule des probabilités composées ou, de manière plus formelle, en travaillant dans  $S_n$  (ensemble des bijections de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ).

2. Utiliser les formules de Taylor.

### Exercice 24.7 Indicatrice d'Euler.

Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 2$ . On note  $p_1, \dots, p_r$  les diviseurs premiers de  $n$ .

On choisit de manière équiprobable un entier  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

On note les évènements :

- ◆ pour  $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $A_m$  : «  $m$  divise  $k$  » ;
- ◆  $B$  : «  $k$  est premier avec  $n$  ».

1. Soit  $m$  un diviseur de  $n$ . Calculer  $\mathbb{P}(A_m)$ .
2. Calculer  $\mathbb{P}(B)$ .
3. **Application.**

On note  $\varphi(n) := \text{Card}\{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid j \wedge n = 1\}$ . Montrer que

$$\varphi(n) = n \times \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

#### indication

1. Calculer  $\text{Card}(A_m)$  en comptant les multiples de  $m$  inférieurs ou égaux à  $n$ .
2.
  - ◆ Exprimer  $B$  en fonction des  $A_{p_k}$ .
  - ◆ Montrer que les  $A_{p_k}$  sont mutuellement indépendants.
    - ◇ Écrire correctement la définition et calculer séparément chaque terme de l'égalité à vérifier.
    - ◇ Pour l'un des termes, utiliser le caractère premier entre eux des  $p_{i_k}$ .

◇ Par exemple, le résultat

$$\left. \begin{array}{l} a \mid c \\ b \mid c \\ a \wedge b = 1 \end{array} \right\} \implies ab \mid c$$

pourra servir.

**3.** Remarquer que  $\text{Card}(B) = \varphi(n)$ .