

Colle 25

Séries

- ▶ Après votre colle, vous êtes invité à reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Vous pouvez me rendre ce travail en le donnant à vos camarades m'ayant en colle la semaine prochaine, ou en le déposant à l'accueil du lycée.
- ▶ Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.



Exercice 25.1

On admet que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 25.2

Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ converge et calculer sa somme.

Exercice 25.3

Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, la série $\sum_n n x^n$ converge, et calculer sa somme.

Exercice 25.4

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive telle que $\sum_n \ln(u_n)$ converge.

Lesquelles des séries ci-dessous convergent ?

$$\sum_n u_n ; \quad \sum_n e^{-n u_n} ; \quad \sum_n \frac{u_n}{2^n} ; \quad \sum_n (u_{n+1} - u_n).$$

Exercice 25.5

Soient $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que $\sum_n |u_n|^2$ et $\sum_n |v_n|^2$ convergent.

Montrer que $\sum_n u_n v_n$ converge.

Exercice 25.6

Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

Exercice 25.7

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n H_n^2}$.

Exercice 25.8

Déterminer un équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 25.9

Soit $\alpha > 1$.
Déterminer un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Exercice 25.10

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

Montrer que $\sum_n \frac{t^n z^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n z^n}{n!} = e^{tz}$.

2. (a) Écrire e , e^j et e^{j^2} en fonction des sommes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)!} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)!}.$$

(b) En déduire la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}$.

3. Proposer une méthode pour calculer, pour $p \in \mathbb{N}^*$, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(pn)!}$.

Exercice 25.11 Transformation d'Abel.

Soient $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $V_n := \sum_{k=0}^n v_k$.

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^n \varepsilon_k v_k = \sum_{k=0}^{n-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) V_k + \varepsilon_n V_n.$$

2. On suppose que $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de limite nulle et que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
Montrer que $\sum_n \varepsilon_n v_n$ converge.

3. Soit $\alpha > 0$. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z})$.

(a) Montrer que la série $\sum_n \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge.

(b) En déduire la nature des séries $\sum_n \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\sum_n \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$.