

Colle 25 • INDICATIONS

Séries

Exercice 25.1

On admet que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$ converge et calculer sa somme.

indication

Pour la convergence, un équivalent suffit. Pour le calcul, on commencera par décomposer en éléments simples et on pourra s'aider de la décomposition $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

résultat

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{3} - 3.$$

Exercice 25.2

Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ converge et calculer sa somme.

indication

Remarquer que

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = (\ln(n+1) - \ln(n)) - (\ln(n) - \ln(n-1))$$

et utiliser les résultats sur les séries télescopiques.

résultat

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -\ln(2).$$

Exercice 25.3

Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, la série $\sum_n n x^n$ converge, et calculer sa somme.

indication

On peut dériver l'identité « $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ », puis passer à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$.

résultat

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Exercice 25.4

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive telle que $\sum_n \ln(u_n)$ converge.

Lesquelles des séries ci-dessous convergent ?

$$\sum_n u_n ; \quad \sum_n e^{-n u_n} ; \quad \sum_n \frac{u_n}{2^n} ; \quad \sum_n (u_{n+1} - u_n).$$

indication

- ▶ Utiliser une condition nécessaire de convergence.
- ▶ Majorer à partir d'un certain rang le terme général et conclure par comparaison.
- ▶ Déterminer un équivalent.
- ▶ C'est une série télescopique : on connaît sa nature lorsque l'on connaît la nature de la suite associée.

Exercice 25.5

Soient $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que $\sum_n |u_n|^2$ et $\sum_n |v_n|^2$ convergent.

Montrer que $\sum_n u_n v_n$ converge.

indication

Utiliser l'inégalité « $|ab| \leq \frac{|a|^2 + |b|^2}{2}$ » (à savoir démontrer), et conclure par comparaison pour les séries à termes positifs.

Exercice 25.6

Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

indication

Montrer que $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

résultat

La série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ converge.

Exercice 25.7

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n H_n^2}$.

indication

- ◆ Procéder par comparaison série intégrale pour montrer que $H_n \sim \ln(n)$.
- ◆ Procéder par comparaison série intégrale pour déterminer la nature de $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$.
- ◆ Conclure par critère de comparaison pour les séries à termes positifs.

résultat

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n H_n}$ converge.

Exercice 25.8

Déterminer un équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

indication

Utiliser une comparaison série intégrale avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$.

résultat

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}.$$

Exercice 25.9

Soit $\alpha > 1$.

Déterminer un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

indication

Procéder par comparaison série intégrale avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$.

résultat

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha - 1)n^{\alpha-1}}.$$

Exercice 25.10

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

Montrer que $\sum_n \frac{t^n z^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n z^n}{n!} = e^{tz}$.

2. (a) Écrire e , e^j et e^{j^2} en fonction des sommes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)!} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)!}.$$

(b) En déduire la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}$.

3. Proposer une méthode pour calculer, pour $p \in \mathbb{N}^*$, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(pn)!}$.

indication

1. Utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.
2. Utiliser les propriétés de j comme racine 3-ième de l'unité.
3. Utiliser les racines p -ièmes de l'unité et ce qui précède.

résultat

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} = \frac{e + e^j + e^{j^2}}{3} = \frac{e + 2e^{-1/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{3}.$$

Exercice 25.11 Transformation d'Abel.

Soient $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $V_n := \sum_{k=0}^n v_k$.

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^n \varepsilon_k v_k = \sum_{k=0}^{n-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) V_k + \varepsilon_n V_n.$$

2. On suppose que $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de limite nulle et que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Montrer que $\sum_n \varepsilon_n v_n$ converge.

3. Soit $\alpha > 0$. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z})$.

(a) Montrer que la série $\sum_n \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge.

(b) En déduire la nature des séries $\sum_n \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\sum_n \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$.

indication

1. Exprimer v_k en fonction de V_k et V_{k-1} et faire un changement d'indice.
2. Utiliser la transformation d'Abel pour exprimer le terme général de la suite des sommes partielles.

Vérifier la convergence de chaque terme à l'aide des hypothèses.

3. (a) Vérifier les hypothèses du théorème d'Abel avec deux suites judicieusement choisies.
- (b) Revenir aux parties réelles et imaginaires.