Lycée Chateaubriand William GREGORY
MPSI 3 • 2025 – 2026

Colle 1
Raisonnements

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant mercredi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Exercice 1.1

Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite polynomiale de degré $n \in \mathbb{N}$ lorsque :
$$\exists a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Déterminer l'ensemble des fonctions polynomiales de degré 3 impaires.

Exercice 1.2

Soient $p, q \in [1, +\infty[$ tels que $p \leqslant q$.
Soit $r \in [p, q]$.
Montrer que :
$$\exists \theta \in [0, 1] : \quad \frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}.$$

Exercice 1.3

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

La fonction f est dite paire lorsque
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = f(x).$$

Montrer que f est paire si, et seulement si, il existe une unique fonction $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = g(x^2).$$

Exercice 1.4

Déterminer l'entier le plus proche de $\sqrt{73}$.

Exercice 1.5

1. Soit $a \geqslant 0$. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+a)^n \geqslant 1 + n\,a.$$

2. Soit $q \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que, si $q > 1$, $q^n \longrightarrow +\infty$.
(b) Montrer que, si $q \in [0, 1[$, $q^n \longrightarrow 0$.

Exercice 1.6

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $k_1, \dots, k_p \in \mathbb{N}$ tous distincts tels que :
$$n = 2^{k_1} + \cdots + 2^{k_p}.$$

Exercice 1.7

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que n est le carré d'un entier.
Le nombre $2n$ peut-il être le carré d'un entier ?

Exercice 1.8

1. Déterminer la solution r_0 de l'équation :
$$x^2 - 10x + 25 = 0.$$

2. Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = 10u_{n+1} - 25u_n.$$
Montrer que :
$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} :\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = (\lambda n + \mu){r_0}^n.$$

Exercice 1.9

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - \lambda u_n = v_n.$$

1. Soit $K \in \mathbb{N}$.

(a) Exprimer u_0 en fonction des termes $v_0, \dots, v_K$ et u_{K+1}.

(b) De même, pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n.

2. Si $u_n \longrightarrow 0$ et $\lambda \geqslant 1$, que peut-on en déduire sur la suite $\left(\sum_{k=0}^{K} \frac{v_k}{\lambda^{k+1}} \right)_K$?

Exercice 1.10

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

1. Déterminer, pour $x \in \mathbb{R}$, l'expression de $f(x)$.

2. On suppose que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f\big(f(x)\big) = x.$$
Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que :
$$f(x_1) = x_1, \quad f(x_2) = -x_2 \quad \text{et} \quad x = x_1 + x_2.$$