William GREGORY

Colle 1 • INDICATIONS
Raisonnements

Exercice 1.1

> *Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite polynomiale de degré $n \in \mathbb{N}$ lorsque :*
> $$\exists a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Déterminer l'ensemble des fonctions polynomiales de degré 3 impaires.

indication

Raisonner par analyse-synthèse. En se donnant f une fonction polynomiale de degré 3, déterminer des conditions sur les coefficients a_0, ..., a_3 pour avoir
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f(-x) = 0.$$
On pourra en particulier évaluer cette relation en certains points.

résultat

Les fonctions répondant au problème sont dans l'ensemble $\left\{x \longmapsto a_3 x^3 + a_1 x \ ; \ a_1, a_3 \in \mathbb{R}\right\}$.

Exercice 1.2

Soient $p, q \in [1, +\infty[$ tels que $p \leqslant q$.
Soit $r \in [p, q]$.
Montrer que :
$$\exists \theta \in [0, 1] : \quad \frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}.$$

indication

Raisonner par analyse-synthèse, en n'oubliant pas de vérifier que la solution trouvée est bien dans $[0, 1]$.

Exercice 1.3

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

> *La fonction f est dite paire lorsque*
> $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = f(x).$$

Montrer que f est paire si, et seulement si, il existe une unique fonction $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = g(x^2).$$

indication

$\boxed{\Leftarrow}$ Se vérifie par calcul.

$\boxed{\Rightarrow}$ Raisonner par analyse synthèse. Évaluer en $x = \sqrt{t}$ pour trouver g. La parité de f permet de vérifier que g répond bien au problème.

Exercice 1.4

Déterminer l'entier le plus proche de $\sqrt{73}$.

indication

- Commencer par encadrer $\sqrt{73}$ par deux entiers consécutifs : 8 et 9.
- Comparer les nombres $\left|\sqrt{73}-8\right|$ et $\left|\sqrt{73}-9\right|$ en comparant leur carré.

résultat

L'entier plus proche de $\sqrt{73}$ est 9.

Exercice 1.5

1. Soit $a \geqslant 0$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+a)^n \geqslant 1 + n\,a.$$

2. Soit $q \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que, si $q > 1$, $q^n \longrightarrow +\infty$.

(b) Montrer que, si $q \in [0, 1[$, $q^n \longrightarrow 0$.

indication

1. Raisonner par récurrence. Ce résultat est appelé « l'inégalité de Bernoulli ».

2. **(a)** Utiliser l'inégalité précédente avec $a = q - 1 > 0$ et passer à la limite par minoration.

(b) Si $q \neq 0$, appliquer la question précédente avec $q' := \dfrac{1}{q}$.

Exercice 1.6

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $k_1, \ldots, k_p \in \mathbb{N}$ tous distincts tels que :

$$n = 2^{k_1} + \cdots + 2^{k_p}.$$

indication

Procéder par récurrence forte. Dans l'hérédité, on pourra supposer la propriété vraie pour tous les entiers strictement inférieurs à n pour montrer la propriété pour n, en distinguant les cas où n est pair et n est impair. Dans le cas où n est pair, on utilise la décomposition de $\dfrac{n}{2}$ et dans le cas où n est impair, $n-1$ est pair.

Exercice 1.7

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que n est le carré d'un entier.
Le nombre $2n$ peut-il être le carré d'un entier ?

indication

- Si $n = 0$, oui.
- Si $n \neq 0$, raisonner par l'absurde et aboutir à une contradiction avec l'hypothèse de départ en utilisant que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 1.8

1. Déterminer la solution r_0 de l'équation :
$$x^2 - 10x + 25 = 0.$$

2. Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 10u_{n+1} - 25u_n.$$

Montrer que :
$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda n + \mu){r_0}^n.$$

indication

1. Méthode classique.

2. Raisonner par analyse-synthèse. Évaluer en $n = 0$ et $n = 1$ pour déterminer λ et μ puis, dans la synthèse, raisonner par récurrence à deux prédécesseurs.

résultat

1. $r_0 = 5$.

Exercice 1.9

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - \lambda u_n = v_n.$$

1. Soit $K \in \mathbb{N}$.

(a) Exprimer u_0 en fonction des termes $v_0, \dots, v_K$ et u_{K+1}.

(b) De même, pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n.

2. Si $u_n \longrightarrow 0$ et $\lambda \geqslant 1$, que peut-on en déduire sur la suite $\left(\sum_{k=0}^{K} \frac{v_k}{\lambda^{k+1}}\right)_K$?

indication

1. **(a)** Établir une conjecture en écrivant la relation pour les premiers termes, puis la démontrer par récurrence.

(b) C'est la même chose, en décalant de n.

2. Exprimer $\sum_{k=0}^{K} \frac{v_k}{\lambda^{k+1}}$ en fonction des termes u_0 et u_{K+1}, puis faire tendre K vers $+\infty$.

résultat

1. **(a)** $u_0 = -\sum_{k=0}^{K} \frac{v_k}{\lambda^{k+1}} + \frac{u_{K+1}}{\lambda^{K+1}}$.

   (b) $u_0 = -\sum_{k=0}^{K} \frac{v_{n+k}}{\lambda^{n+k+1}} + \frac{u_{n+K+1}}{\lambda^{n+K+1}}$.

2. La suite $\left(\sum_{k=0}^{K} \frac{v_k}{\lambda^{k+1}}\right)_n$ converge.

Exercice 1.10

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

1. Déterminer, pour $x \in \mathbb{R}$, l'expression de $f(x)$.
2. On suppose que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f\big(f(x)\big) = x.$$
Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que :
$$f(x_1) = x_1, \quad f(x_2) = -x_2 \quad \text{et} \quad x = x_1 + x_2.$$

indication

1. Tester avec des valeurs stratégiques. Notamment, pour tout réel x, $x = 1 \times x$.
2. Raisonner par analyse-synthèse.

résultat

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(1)x$.
2. $x_1 = \frac{x + f(x)}{2}$ et $x_2 = \frac{x - f(x)}{2}$.