# Colle 2 • INDICATIONS
# Raisonnements, ensembles

## Exercice 2.1

*Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite polynomiale de degré $n \in \mathbb{N}$ lorsque :*
$$\exists a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Déterminer l'ensemble des fonctions polynomiales de degré 4 paires.

***indication***

Raisonner par analyse-synthèse. En se donnant $f$ une fonction polynomiale de degré 3, déterminer des conditions sur les coefficients $a_0$, ..., $a_4$ pour avoir
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - f(-x) = 0.$$
On pourra en particulier évaluer cette relation en certains points.

***résultat***

Les fonctions répondant au problème sont dans l'ensemble $\left\{x \longmapsto a_4 x^4 + a_2 x + a_0 \ ; \ a_0, a_2, a_4 \in \mathbb{R}\right\}$.

## Exercice 2.2

**1.** Déterminer les solutions $r_1, r_2$ de l'équation
$$x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{35}{6} = 0.$$

**2.** Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{1}{6}u_{n+1} + \frac{35}{6}u_n.$$
Montrer que :
$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda {r_1}^n + \mu {r_2}^n.$$

***indication***

**1.** Méthode classique.

**2.** Raisonner par analyse-synthèse. Évaluer en $n = 0$ et $n = 1$ pour déterminer $\lambda$ et $\mu$ puis, dans la synthèse, raisonner par récurrence à deux prédécesseurs.

***résultat***

**1.** $r_1 = \frac{5}{2}$ et $r_2 = -\frac{7}{3}$.

## Exercice 2.3

Soient $p, q \in [1, +\infty[$ tels que $p \leqslant q$.
Soit $r \in [p, q]$.
Montrer que :

$$\exists \theta \in [0,1] : \quad \frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}.$$

***indication***

Raisonner par analyse-synthèse, en n'oubliant pas de vérifier que la solution trouvée est bien dans $[0,1]$.

## Exercice 2.4

Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$\sqrt{21-4x} = x.$$

***indication***

Élever au carré, résoudre l'équation polynomiale de degré 2 déterminée et déterminer la solution du problème par des considérations de signe.

***résultat***

$$x = 3.$$

## Exercice 2.5

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) := a\,x$. On suppose que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f\Big(f(x)\Big) + f(x) = 2x.$$

**1.** Déterminer les valeurs possibles de $a$.

**2.** Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$f(x_1) = x_1, \quad f(x_2) = -2x_2 \quad \text{et} \quad x = x_1 + x_2.$$

***indication***

**1.** Évaluer la relation supposée sur $f$ en $x = 1$ et résoudre l'équation de degré 2.

**2.** Raisonner par analyse-synthèse.

***résultat***

**1.** $a = 1$ ou $a = -2$.

**2.** $x_1 = \dfrac{2x + f(x)}{3}$ et $x_2 = \dfrac{x - f(x)}{3}$.

## Exercice 2.6

Soit $E$ un ensemble.
Soient $A, B, C$ trois parties de $E$.
Montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{array}\right\} \iff B = C.$$

**indication**

On pourra commencer par montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} A \cup B \subset A \cup C \\ A \cap B \subset A \cap C \end{array}\right\} \iff B \subset C.$$

## Exercice 2.7

Soit $E$ un ensemble.
Soient $A, B, C$ trois parties de $E$.
Montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} B \cup C \subset A \cap C \\ A \subset B \cap C \end{array}\right\} \iff A = B = C.$$

## Exercice 2.8

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n := \dfrac{\sqrt{n+1}}{2^{2n}} \dbinom{2n}{n}$.

Montrer que la suite $\left(u_n{}^2\right)_n$ est monotone.

**indication**

En notant $v_n := u_n{}^2$, calculer le quotient $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ (en justifiant son existence) et le comparer à 1 :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{4n^3 + 12n^2 + 9n + 2}{4n^3 + 12n^2 + 12n + 4}.$$

**résultat**

La suite $\left(u_n{}^2\right)_n$ est décroissante.

## Exercice 2.9

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{4^n}{2n} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant \frac{4^n}{2}.$$

**indication**

Raisonner par récurrence, en écrivant que $\dbinom{2(n+1)}{n+1} = \dfrac{2(2n+1)}{n+1} \dbinom{2n}{n}$.

## Exercice 2.10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $u_n \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!} = u_n\binom{2n}{n}.$$

**indication**

Développer le numérateur, faire apparaître les quantités $(2n)!$, $n!$ et factoriser par une puissance de 2.

**résultat**

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n+2}\left(n-\frac{1}{2}\right)}\binom{n}{2n}.$$