Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2025 – 2026

William GREGORY

Colle 3

Techniques algébriques

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant mercredi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Exercice 3.1

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme :
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}.$$

Exercice 3.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $u_n \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!} = u_n \binom{2n}{n}.$$

Exercice 3.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

1. Écrire $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2$ en fonction de
$$\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{(k,\ell)\in[\![1,n]\!]^2 \\ k<\ell}} x_k x_\ell.$$

2. On suppose que :
$$\forall k, \ell \in [\![1, n]\!], \quad x_k x_\ell \geqslant 0.$$
Quelle inégalité peut-on en déduire ?

Exercice 3.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

1. Montrer que $S_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

2. En admettant que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \ln(2),$$
calculer :
$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1}.$$

Exercice 3.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

On définit la fonction $P : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Soit $c \in \mathbb{R}$ tel que $P(c) = 0$.

Montrer que
$$\exists b_0, b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{R} : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x-c)\sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k.$$

Exercice 3.6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}}.$$

Exercice 3.7

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le nombre
$$\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n} + \left(1+\sqrt{2}\right)^{2n}$$
est un entier naturel pair.

Exercice 3.8

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Calculer :
$$\left(x^2 + xy + \frac{y^2}{2}\right)\left(x^2 - xy + \frac{y^2}{2}\right).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{4k^4+1}.$$