Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2025 – 2026

William GREGORY

Colle 3 • INDICATIONS
Techniques algébriques

Exercice 3.1

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}.$$

indication

Calculer $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k}$. On pourra s'aider de la fonction $x \longmapsto (1+x)^n$ et de ses dérivées en 1.

résultat

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

Exercice 3.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $u_n \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!} = u_n \binom{2n}{n}.$$

indication

Développer le numérateur, faire apparaître les quantités $(2n)!$, $n!$ et factoriser par une puissance de 2.

résultat

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n+2}\left(n-\frac{1}{2}\right)} \binom{n}{2n}.$$

Exercice 3.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

1. Écrire $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2$ en fonction de

$$\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 \text{ et } \sum_{\substack{(k,\ell)\in[\![1,n]\!]^2 \\ k<\ell}} x_k x_\ell.$$

2. On suppose que :

$$\forall k, \ell \in [\![1, n]\!], \quad x_k x_\ell \geqslant 0.$$

Quelle inégalité peut-on en déduire ?

indication

1. Voir ce qu'il se passe dans le cas $n = 2$ et raisonner par récurrence.

résultat

1. $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 + 2 \sum_{\substack{(k,\ell)\in[\![1,n]\!]^2 \\ k<\ell}} x_k x_\ell.$

2. $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \geqslant \sum_{k=1}^{n} {x_k}^2.$

Exercice 3.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\mathrm{S}_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

1. Montrer que $\mathrm{S}_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

2. En admettant que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \ln(2),$$

calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_{2n} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_{2n+1}.$$

indication

1. Sommer sur les termes pairs et impairs, puis faire des décalages d'indices.

2. On a $\mathrm{S}_{2n+1} = \mathrm{S}_{2n} + \frac{1}{2n+1}$.

résultat

2. $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \ln(2)$.

Exercice 3.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

On définit la fonction $P : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Soit $c \in \mathbb{R}$ tel que $P(c) = 0$.

Montrer que

$$\exists b_0, b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{R} : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x-c)\sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k.$$

indication

Pour $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = P(x) - P(c) = (x-c)\sum_{k=\dots}^{\dots} \dots$ (formule $a^n - b^n = \dots$). Il faut ensuite intervertir les deux symboles de sommation pour obtenir les coefficients b_0, …, b_{n-1}.

Exercice 3.6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}}.$$

indication

Multiplier par la quantité conjuguée pour faire apparaître une somme télescopique.

résultat

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Exercice 3.7

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le nombre

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n} + \left(1+\sqrt{2}\right)^{2n}$$

est un entier naturel pair.

indication

À l'aide la formule du binôme de Newton, montrer que :

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n} + \left(1+\sqrt{2}\right)^{2n} = 2\sum_{\ell=0}^{n}\binom{2n}{2\ell}2^p.$$

Exercice 3.8

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Calculer :

$$\left(x^2 + xy + \frac{y^2}{2}\right)\left(x^2 - xy + \frac{y^2}{2}\right).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{4k^4+1}.$$

indication

1. Développer l'expression donnée.

2. La première question permet d'écrire $4k^4+1$ comme un produit. Il faut ensuite écrire $4k$ comme une différence entre les deux termes du produit. Enfin, il s'agit de reconnaître, après une dernière manipulation, une somme télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{4k^4+1} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k^2-2k+1} - \frac{1}{2(k+1)^2-2(k+1)+1}\right).$$

résultat

1. $\left(x^2 + xy + \frac{y^2}{2}\right)\left(x^2 - xy + \frac{y^2}{2}\right) = x^4 + \frac{1}{4}y^4.$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{4k^4+1} = 1 - \frac{1}{2n^2+2n+1}.$