Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2025 – 2026

William GREGORY

Colle 4

Techniques algébriques, nombres complexes

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant mercredi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Techniques algébriques

Exercice 4.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}}.$$

Exercice 4.2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le nombre

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n} + \left(1+\sqrt{2}\right)^{2n}$$

est un entier naturel pair.

Exercice 4.3

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Calculer :

$$\left(x^2 + xy + \frac{y^2}{2}\right)\left(x^2 - xy + \frac{y^2}{2}\right).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{4k^4+1}.$$

Exercice 4.4

Soient $n, p, q \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \leqslant p + q$.
Exprimer, à l'aide d'un seul coefficient binomial, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$.

Exercice 4.5

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{H}_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k}.$$

Exercice 4.6

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k.$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} b_k.$$

2. Soit $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k.$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Nombres complexes

Exercice 4.7

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on définit $f(z) := \dfrac{\overline{z}}{z}$.

1. Déterminer :

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; f(z) \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R} \right\}.$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Déterminer $f(\overline{z})$.

Exercice 4.8

Soient $a, b \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que :

$$|a| + |b| \leqslant |a+b| + |a-b|.$$

2. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 4.9

On définit l'application

$$\mathrm{d} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (z_1, z_2) & \longmapsto & \dfrac{|z_1 - z_2|}{1 + |z_1 - z_2|} \end{array} \right..$$

Soient $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Montrer que :

$$\mathrm{d}(z_1, z_3) \leqslant \mathrm{d}(z_1, z_2) + \mathrm{d}(z_2, z_3).$$

Exercice 4.10

1. Montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}.$$

2. Soient $a, b \in \mathbb{C}$.

(a) Montrer que :

$$|a-b|^2 \leqslant \left(1 + |a|^2\right)\left(1 + |b|^2\right).$$

(b) Étudier le cas d'égalité.