Colle 4 • INDICATIONS
Techniques algébriques, nombres complexes

Exercice 4.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}}.$$

indication

Multiplier par la quantité conjuguée pour faire apparaître une somme télescopique.

résultat

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Exercice 4.2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le nombre

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n} + \left(1+\sqrt{2}\right)^{2n}$$

est un entier naturel pair.

indication

À l'aide la formule du binôme de Newton, montrer que :

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n} + \left(1+\sqrt{2}\right)^{2n} = 2\sum_{\ell=0}^{n} \binom{2n}{2\ell} 2^p.$$

Exercice 4.3

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Calculer :

$$\left(x^2 + xy + \frac{y^2}{2}\right)\left(x^2 - xy + \frac{y^2}{2}\right).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{4k^4+1}.$$

indication

1. Développer l'expression donnée.
2. La première question permet d'écrire $4k^4+1$ comme un produit. Il faut ensuite écrire $4k$ comme une différence entre les deux termes du produit. Enfin, il s'agit de reconnaître, après une dernière manipulation, une somme télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{4k^4+1} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k^2-2k+1} - \frac{1}{2(k+1)^2-2(k+1)+1} \right).$$

résultat

1. $\left(x^2+xy+\dfrac{y^2}{2}\right)\left(x^2-xy+\dfrac{y^2}{2}\right) = x^4+\dfrac{1}{4}y^4.$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{4k^4+1} = 1 - \frac{1}{2n^2+2n+1}.$

Exercice 4.4

Soient $n, p, q \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \leqslant p+q$.

Exprimer, à l'aide d'un seul coefficient binomial, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$.

indication

Utiliser le binôme de Newton et l'égalité $(1+x)^{p+q} = (1+x)^p(1+x)^q$.

résultat

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$

Exercice 4.5

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{H}_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k}.$$

indication

Raisonner par récurrence sachant que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n+1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right].$$

Aussi, comme $\dfrac{1}{k}\dbinom{n}{k-1} = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{n+1}{k}$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{1}{n+1} - \frac{(1-1)^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Exercice 4.6

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k.$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k.$$

2. Soit $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k.$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

indication

Ce document peut aider : `https://perso.eleves.ens-rennes.fr/people/pierre.le-barbenchon/appendice/pascalsurj.pdf`.

Exercice 4.7

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on définit $f(z) := \dfrac{\overline{z}}{z}$.

1. Déterminer :

$$\left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; f(z) \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{et} \quad \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R}\right\}.$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Déterminer $f(\overline{z})$.

indication

1. Utiliser la forme algébrique et procéder par identification partie réelle - partie imaginaire.
2. Utiliser les propriétés de la conjugaison.

résultat

1. En posant $x := \mathfrak{Re}(z)$ et $y := \mathfrak{Im}(z)$, on a :

$$f(z) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \mathrm{i}\frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

$$\left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; f(z) \in \mathbb{R}\right\} = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathfrak{Re}(z) = 0 \text{ ou } \mathfrak{Im}(z) = 0\right\}.$$

$$\left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R}\right\} = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathfrak{Re}(z) = \pm\mathfrak{Im}(z)\right\}.$$

2. $f(\overline{z}) = \overline{f(z)} = \dfrac{1}{f(z)}$.

Exercice 4.8

Soient $a, b \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que :

$$|a| + |b| \leqslant |a+b| + |a-b|.$$

2. Étudier le cas d'égalité.

indication

1. Écrire $2a$ et $2b$ en fonction et $a+b$ et $a-b$, puis utiliser l'inégalité triangulaire.

2. Se ramener au cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire entre

$$a+b \text{ et } a-b \quad \text{et} \quad a+b \text{ et } b-a.$$

résultat

$$|a| + |b| \leqslant |a+b| + |a-b| \iff a = \pm b.$$

Exercice 4.9

On définit l'application

$$\mathrm{d} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (z_1, z_2) & \longmapsto & \dfrac{|z_1 - z_2|}{1 + |z_1 - z_2|} \end{array} \right. .$$

Soient $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Montrer que :

$$\mathrm{d}(z_1, z_3) \leqslant \mathrm{d}(z_1, z_2) + \mathrm{d}(z_2, z_3).$$

indication

Remarquer que :

$$\mathrm{d}(z_1, z_3) = \frac{|z_1 - z_3| + 1 - 1}{1 + |z_1 - z_3|} = 1 - \frac{1}{1 + |z_1 - z_3|},$$

puis appliquer l'inégalité triangulaire au terme $|z_1 - z_3|$ pour faire apparaître z_2.

Exercice 4.10

1. Montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}.$$

2. Soient $a, b \in \mathbb{C}$.

(a) Montrer que :

$$|a-b|^2 \leqslant \left(1 + |a|^2\right)\left(1 + |b|^2\right).$$

(b) Étudier le cas d'égalité.

indication

1. Calculer $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2$.

2. **(a)** L'inégalité triangulaire donne $|a-b|^2 \leqslant |a|^2 + |b|^2 + 2|ab|$ et on utilise l'inégalité arithmético-géométrique pour obtenir

$$2|ab| \leqslant 1 + |ab|^2,$$

et conclure.

(b) Il suffit d'avoir égalité dans les deux majorations faites ci-dessus.

résultat

$$|a-b|^2 \leqslant \left(1+|a|^2\right)\left(1+|b|^2\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \theta \in \mathbb{R}, R \in \mathbb{R}_+^* : \quad a = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \ \text{ et } \ b = \frac{-1}{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$