William GREGORY

Colle 5
Nombres complexes

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant vendredi midi.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Exercice 5.1

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \neq 1$.
Calculer la somme :

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(kt + \frac{\pi}{4}\right).$$

Exercice 5.2

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $|z|$ pour que

$$\frac{1+z}{1-z} \in \mathrm{i}\mathbb{R}.$$

Exercice 5.3

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.
Déterminer les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$$(z+1)^n = (z-1)^n$$

et montrer que ces solutions sont des nombres imaginaires purs.

Exercice 5.4

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. On définit :

$$a := \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, \quad b := \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} \quad \text{et} \quad c := \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}.$$

Exprimer, en fonction de x, y et z le module et un argument du nombre complexe

$$\frac{c^2 + ab}{ab}.$$

Exercice 5.5

Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$, on pose

$$h(z) := \frac{z+1}{z-2}.$$

Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels :

1. $\left|h(z)\right| = 1$;
2. $\mathfrak{Re}\left(h(z)\right) = 0$.

Exercice 5.6

Soient $a, b \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que
$$|a-b|^2 \leqslant \left(1+|a|^2\right)\left(1+|b|^2\right).$$
2. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 5.7 Noyaux de Dirichlet et de Féjer.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{D}_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} \quad \text{et} \quad \mathrm{K}_n(t) := \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \mathrm{D}_m(t).$$

1. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $t \equiv 0 \; [2\pi]$. Calculer $\mathrm{D}_n(t)$ et $\mathrm{K}_n(t)$.

2. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $t \not\equiv 0 \; [2\pi]$. Montrer que :

$$\mathrm{D}_n(t) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

3. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $t \not\equiv 0 \; [2\pi]$.

(a) Calculer $\displaystyle\sum_{m=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(m+\frac{1}{2}\right)t}$.

(b) En déduire $\mathrm{K}_n(t)$.

Exercice 5.8

Soit $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On définit

$$\Delta_\theta := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{cases} |z| < 1 \\ \exists \rho \in \left]0, \cos(\theta)\right[, \; \exists \varphi \in \left]-\theta, \theta\right[: \quad z = 1 - \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \end{cases} \right\}.$$

1. Dessiner Δ_θ dans le plan complexe.

2. Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| < 1 \implies \frac{1}{1 - |z|} \leqslant \frac{2}{1 - |z|^2}.$$

3. Montrer que

$$\forall z \in \Delta_\theta, \quad \frac{|1 - z|}{1 - |z|} \leqslant \frac{2}{\cos(\theta)}.$$