William GREGORY

Colle 6

Trigonométrie, Applications

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant mercredi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Trigonométrie

Exercice 6.1

Résoudre sur $[-\pi, \pi]$ l'inéquation :

$$\cos(3x) - \cos(2x) + \cos(x) > 0.$$

Exercice 6.2

Montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \left|\sin(x) - \sin(y)\right| \leqslant |x - y|.$$

Exercice 6.3

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|\sin(x)\right| \leqslant |x|.$$

Exercice 6.4

1. **(a)** Montrer que :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x).$$

(b) En déduire que $\dfrac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1$.

(c) Montrer que $\dfrac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$.

2. Déterminer les limites en 0 des expressions :

$$\frac{1 - \cos(x)}{x^2} \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos(x)}{x \sin(x)}.$$

Applications

Exercice 6.5

Justifier l'existence et déterminer, sur un domaine à préciser, la réciproque de

$$x \longmapsto 8\sqrt[4]{2\ln(x) + 1}.$$

Exercice 6.6

On considère l'application

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x-y}{2}\right). \end{array} \right.$$

L'application est-elle injective ? surjective ? Si oui, déterminer sa réciproque.

Exercice 6.7

Soient E et F deux ensembles.
Soit $f : E \longrightarrow F$.

1. Montrer que :

$$\forall A, A' \in \mathscr{P}(E), \quad f[A \cup A'] = f[A] \cup f[A'].$$

2. **(a)** Montrer que :

$$\forall A, A' \in \mathscr{P}(E), \quad f[A \cap A'] \subset f[A] \cap f[A'].$$

(b) Montrer que l'inclusion réciproque est fausse en général.

(c) Montrer que l'inclusion réciproque est vraie si, et seulement si, f est injective.

Exercice 6.8

Soient E et F deux ensembles.
Soit $f : E \longrightarrow F$.

1. Montrer que :

$$\forall A \in \mathscr{P}(E), \quad A \subset f^{\langle -1 \rangle}\Big[f[A]\Big].$$

2. Montrer que l'inclusion réciproque est fausse en général.

3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur f pour qu'il y ait égalité.

Exercice 6.9

On définit $h : z \longmapsto \dfrac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de h que l'on notera $\mathscr{D}_h$.

2. Montrer que $h : \mathscr{D}_h \longrightarrow \mathscr{D}_{h^{-1}}$ est une bijection dont on explicitera la réciproque.
L'ensemble $\mathscr{D}_{h^{-1}}$ désigne le domaine de définition de h^{-1}, qui est aussi à déterminer.

3. Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}\}, \quad 1 - \Big|h(z)\Big|^2 = \frac{4\,\mathfrak{Im}(z)}{|z + \mathrm{i}|^2}.$$

Que dire lorsque $\mathfrak{Im}(z) > 0$?

4. Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \quad \mathfrak{Im}\Big(h^{-1}(z)\Big) = \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2}.$$

Que dire lorsque $|z| < 1$?

On définit les ensembles :

- $\mathbb{H} := \Big\{ z \in \mathbb{C} \;\Big|\; \mathfrak{Im}(z) > 0 \Big\}$ *le* demi-plan de Poincaré *;*
- $\mathbb{D} := \Big\{ z \in \mathbb{C} \;\Big|\; |z| < 1 \Big\}$ *le* disque unité ouvert.

5. Que dire de $h[\mathbb{H}]$ et de $\mathbb{D}$?