Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2025 – 2026

William GREGORY

Colle 7
Fonctions, Convexité

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant mercredi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Fonctions usuelles, inégalités

Exercice 7.1

Montrer que :
$$\forall x \geqslant 0, \quad e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

Exercice 7.2

Montrer que :
$$\forall x \geqslant 1, \quad \ln(x) \leqslant 2\sqrt{x}.$$

Exercice 7.3

1. (a) Montrer que :
$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x).$$

(b) En déduire que $\dfrac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1$.

(c) Montrer que $\dfrac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$.

2. Déterminer les limites en 0 des expressions :
$$\frac{1-\cos(x)}{x^2} \quad \text{et} \quad \frac{1-\cos(x)}{x\sin(x)}.$$

Exercice 7.4

1. Montrer que :
$$\forall t \in]0,1], \quad 1 - \frac{1}{t} \leqslant \ln(t) \leqslant t - 1.$$

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x < y$.
Montrer que
$$\frac{1}{y} \leqslant \frac{\ln(x) - \ln(y)}{x - y} \leqslant \frac{1}{x}.$$

Exercice 7.5

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :
$$\forall x \geqslant 0, \quad (1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Exercice 7.6

Soit $x \in \mathbb{R}$.
Calculer les limites lorsque $n \to +\infty$ de :
$$n\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \quad \text{et} \quad n\ln\left(1 + \frac{x}{n^2}\right).$$

Exercice 7.7

Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ le système d'équations
$$\begin{cases} e^y + ye^x = 0 \\ xe^y + e^x = 0. \end{cases}$$

Convexité

Exercice 7.8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Soit $\alpha > 0$.
Montrer que :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right|^{\alpha} \leqslant n^{\alpha-1} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^{\alpha}.$$

Exercice 7.9

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, convexe, strictement croissante.
On admet que $f^{-1} : f[I] \longrightarrow I$ existe.
Montrer que f^{-1} est concave.

Exercice 7.10

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. On suppose que f est convexe.

(a) Montrer que :

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) \leqslant \max\left\{f(a), f(b)\right\}.$$

(b) Que dire si f admet un maximum en un point $x_0 \in]a, b[$?

2. Établir des résultats analogues dans le cas où f est supposée concave.

Exercice 7.11

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est convexe ;

(ii) l'inégalité des trois pentes est vérifiée :

$$\forall x, y, z \in I, \quad x < y < z \implies \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \ ;$$

(iii) pour tout $a \in I$, $\tau_a : x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

2. Application.
Quelles sont les fonctions $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ à la fois convexes et concaves ?