William GREGORY

Colle 7 • INDICATIONS

Fonctions, Convexité

Exercice 7.1

Montrer que :

$$\forall x \geqslant 0, \quad e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

Exercice 7.2

Montrer que :

$$\forall x \geqslant 1, \quad \ln(x) \leqslant 2\sqrt{x}.$$

Exercice 7.3

1. **(a)** Montrer que :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x).$$

(b) En déduire que $\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1$.

(c) Montrer que $\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$.

2. Déterminer les limites en 0 des expressions :

$$\frac{1 - \cos(x)}{x^2} \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos(x)}{x \sin(x)}.$$

indication

1. **(a)** On peut procéder par des études de fonctions.
(b) Inverser l'inégalité puis diviser par $\sin(x) \neq 0$, puis appliquer le théorème d'encadrement.
(c) Utiliser des arguments de parité pour montrer que ce qui précède fonctionne pour $x \to 0^-$.

2. Utiliser $1 - \cos(x) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ et $\sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

résultat

2. $\frac{1 - \cos(x)}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2}$ et $\frac{1 - \cos(x)}{x \sin(x)} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2}$.

Exercice 7.4

1. Montrer que :

$$\forall t \in]0,1], \quad 1 - \frac{1}{t} \leqslant \ln(t) \leqslant t - 1.$$

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x < y$.
Montrer que

$$\frac{1}{y} \leqslant \frac{\ln(x) - \ln(y)}{x - y} \leqslant \frac{1}{x}.$$

indication

1. Faire deux études de fonctions.
2. Poser $t := \frac{x}{y}$.

Exercice 7.5

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\forall x \geqslant 0, \quad (1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Exercice 7.6

Soit $x \in \mathbb{R}$.
Calculer les limites lorsque $n \to +\infty$ de :

$$n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \quad \text{et} \quad n \ln\left(1 + \frac{x}{n^2}\right).$$

indication

On pourra commencer par établir une inégalité comme :

$$\forall t \in]-1, +\infty[, \quad \frac{t}{1+t} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t.$$

résultat

$$n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} x \quad \text{et} \quad n \ln\left(1 + \frac{x}{n^2}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Exercice 7.7

Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ le système d'équations

$$\begin{cases} e^y + y e^x = 0 \\ x e^y + e^x = 0. \end{cases}$$

indication

Se ramener à l'équation $e^{\frac{1}{x}} + \frac{e^x}{x} = 0$, en trouver une solution et réaliser une étude de fonction pour montrer que c'est la seule.

résultat

L'unique solution du système est $(x, y) = (-1, -1)$.

Exercice 7.8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Soit $\alpha > 0$.
Montrer que :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right|^{\alpha} \leqslant n^{\alpha-1} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^{\alpha}.$$

indication

Appliquer l'inégalité de Jensen avec $x \longmapsto |x|^{\alpha}$.

Exercice 7.9

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, convexe, strictement croissante.
On admet que $f^{-1} : f[I] \longrightarrow I$ existe.
Montrer que f^{-1} est concave.

indication

Dans cet exercice, on ne suppose pas f deux fois dérivable. Il n'est donc pas envisageable d'utiliser la dérivée seconde.
En se donnant $y_1, y_2 \in f[I]$, on considère $x_1, x_2 \in I$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.
On utilise la convexité de f et la croissance de f^{-1}.

Exercice 7.10

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. On suppose que f est convexe.

- **(a)** Montrer que :

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) \leqslant \max\left\{f(a), f(b)\right\}.$$

- **(b)** Que dire si f admet un maximum en un point $x_0 \in \,]a, b[$?

2. Établir des résultats analogues dans le cas où f est supposée concave.

indication

1. **(a)** Écrire $x \in [a, b]$ comme $x = (1-t)a + tb$ où $t \in [0, 1]$ et appliquer la définition de la convexité.

(b) Un dessin et l'utilisation de la propriété précédente peuvent aider.

2. Les résultats précédents (pour des fonctions convexes) concernent les maximums de f. Pour les fonctions concaves, on aura des résultats analogues pour les minimums.

résultat

1. **(b)** La fonction f est constante sur $[a, b]$.
2. - Le minimum de f est atteint en a ou en b.
   - Si f admet un minimum en $x_0 \in \,]a, b[$, alors f est constante sur $[a, b]$.

Exercice 7.11

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est convexe ;

(ii) l'inégalité des trois pentes est vérifiée :

$$\forall x, y, z \in I, \quad x < y < z \quad \Longrightarrow \quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \ ;$$

(iii) pour tout $a \in I$, $\tau_a : x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

2. Application.
Quelles sont les fonctions $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ à la fois convexes et concaves ?

indication

1. On utilise principalement que tout réel $y \in \,]x, y[$ s'écrit

$$y = (1 - \lambda)x + \lambda y \text{ avec } \lambda \in \,]0, 1[.$$

2. La fonction τ_0 est à la fois croissante et décroissante donc constante, donc $\tau_0(x) = \tau_0(1)$.

résultat

2. Les fonctions affines.