Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2025 – 2026

William GREGORY

Colle 8

Fonctions, Convexité

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant mercredi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Inégalités

Exercice 8.1

Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - \mathrm{e}^{-x} \leqslant x.$$

Exercice 8.2

Montrer que :
$$\forall x \geqslant 0, \quad \cosh(x) \geqslant 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Exercice 8.3

Montrer que :
$$\forall x > -1, \quad (1+x)^x \geqslant 1.$$

Exercice 8.4

Montrer que :
$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$

Combats

Exercice 8.5

Laquelle des fonctions
$$x \longmapsto (x^2)^{\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad x \longmapsto \sqrt{x}^{x^2}$$
est négligeable devant l'autre en $+\infty$?

Exercice 8.6

Laquelle des fonctions
$$x \longmapsto (\mathrm{e}^x)^x \quad \text{et} \quad x \longmapsto x^{\mathrm{e}^x}$$
est négligeable devant l'autre en $+\infty$?

Exercice 8.7

Laquelle des fonctions
$$x \longmapsto \ln(x)^x + x^4 \quad \text{et} \quad x \longmapsto x$$
est négligeable devant l'autre en $+\infty$?

D'autres inégalités

Exercice 8.8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \dots, x_n > 0$.
Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$. On pose $\alpha := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.
Montrer que :

$$\frac{1}{\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{x_k}} \leqslant \sqrt[\alpha]{\prod_{k=1}^{n} {x_k}^{\alpha_k}} \leqslant \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k.$$

Exercice 8.9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Soit $\alpha > 0$.
Montrer que :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right|^{\alpha} \leqslant n^{\alpha-1} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^{\alpha}.$$

Exercice 8.10

Soient $\alpha, \beta > 0$. Soient $C_1, C_2 > 0$.
On considère :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ R & \longmapsto & \dfrac{C_1}{R^{\alpha}} + C_2 R^{\beta}. \end{array} \right.$$

1. Montrer que f admet un minimum atteint en un réel $R_0 > 0$ et calculer $f(R_0)$.

2. **(a)** Déterminer $R_1 > 0$ tel que :

$$\frac{C_1}{{R_1}^{\alpha}} = C_2 {R_1}^{\beta}.$$

(b) Que dire de R_0 et R_1 ? de $f(R_0)$ et $f(R_1)$?

Exercice 8.11

Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
Soient $a, b > 0$.

1. Montrer que :

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

2. On considère

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varepsilon & \longmapsto & \dfrac{\varepsilon^p a^p}{p} + \dfrac{b^q}{\varepsilon^q q} \end{array} \right.$$

(a) Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad ab \leqslant f(\varepsilon)$$

(b) Montrer que f admet un minimum et le déterminer.

3. Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists C_{\varepsilon,p} > 0 : \ ab \leqslant \varepsilon a^p + C_{\varepsilon,p} b^q.$$

Exercice 8.12

Soit $p \geqslant 2$.

1. À l'aide de la fonction $t \longmapsto (t^2+1)^{\frac{p}{2}} - t^p - 1$, montrer que :

$$\forall x, y \geqslant 0, \quad x^p + y^p \leqslant (x^2+y^2)^{\frac{p}{2}}.$$

2. Montrer que :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad (a^2+b^2)^{\frac{p}{2}} \leqslant 2^{\frac{p}{2}-1}\big(|a|^p + |b|^p\big).$$

3. Conclure que :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leqslant \frac{|a|^p + |b|^p}{2}.$$