Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2025 – 2026
William GREGORY

# Colle 8 • INDICATIONS

# Fonctions, Convexité

## Exercice 8.1

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - \mathrm{e}^{-x} \leqslant x.$$

## Exercice 8.2

Montrer que :

$$\forall x \geqslant 0, \quad \cosh(x) \geqslant 1 + \frac{x^2}{2}.$$

## Exercice 8.3

Montrer que :

$$\forall x > -1, \quad (1+x)^x \geqslant 1.$$

*indication*

Étudier $f : x \longmapsto (1+x)^x = \mathrm{e}^{x\ln(1+x)}$ pour chercher un minimum. Étudier une fonction pour étudier $f'$.

## Exercice 8.4

Montrer que :

$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$

*indication*

- On peut commencer par établir que, pour tout $t > -1$, $\ln(1+t) \leqslant t$, par étude de fonction ou par convexité.
- L'inégalité de droite peut se réécrire « $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leqslant x$ ».
- Remarquer que $\ln(x+1) - \ln(x) = -\ln\left(\frac{x+1-1}{x+1}\right) = -\ln\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)$ .

## Exercice 8.5

Laquelle des fonctions

$$x \longmapsto (x^2)^{\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad x \longmapsto \sqrt{x}^{x^2}$$

est négligeable devant l'autre en $+\infty$ ?

*indication*

Calculer le quotient des deux en utilisant que $a^b = e^{b\ln(a)}$. Un quotient tend vers 0 et l'autre vers $+\infty$.

*résultat*

En $+\infty$, $x \longmapsto (x^2)^{\sqrt{x}}$ est négligeable devant $x \longmapsto \sqrt{x}^{x^2}$.

## Exercice 8.6

Laquelle des fonctions

$$x \longmapsto (e^x)^x \quad \text{et} \quad x \longmapsto x^{e^x}$$

est négligeable devant l'autre en $+\infty$ ?

*indication*

Calculer le quotient des deux en utilisant que $a^b = e^{b\ln(a)}$. Un quotient tend vers 0 et l'autre vers $+\infty$.

*résultat*

En $+\infty$, $x \longmapsto (e^x)^x$ est négligeable devant $x \longmapsto x^{e^x}$.

## Exercice 8.7

Laquelle des fonctions

$$x \longmapsto \ln(x)^x + x^4 \quad \text{et} \quad x \longmapsto x$$

est négligeable devant l'autre en $+\infty$ ?

*indication*

Calculer le quotient des deux en utilisant que $a^b = e^{b\ln(a)}$ et les croissances comparées. Un quotient tend vers 0 et l'autre vers $+\infty$.

*résultat*

En $+\infty$, $x \longmapsto x$ est négligeable devant $x \longmapsto \ln(x)^x + x^4$.

## Exercice 8.8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \dots, x_n > 0$.
Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$. On pose $\alpha := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.
Montrer que :

$$\frac{1}{\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{x_k}} \leqslant \sqrt[\alpha]{\prod_{k=1}^{n} {x_k}^{\alpha_k}} \leqslant \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k.$$

*indication*

Utiliser l'inégalité de Jensen avec la fonction $\ln(\cdot)$ pour l'inégalité de droite avec les poids $\dfrac{\alpha_k}{\alpha}$.
Appliquer l'inégalité de droite à $x_k \leftarrow \dfrac{1}{x_k}$ pour montrer l'inégalité de gauche.

## Exercice 8.9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Soit $\alpha > 0$.
Montrer que :

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k \right|^{\alpha} \leqslant n^{\alpha - 1} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^{\alpha}.$$

*indication*

Appliquer l'inégalité de Jensen avec $x \longmapsto |x|^{\alpha}$.

## Exercice 8.10

Soient $\alpha, \beta > 0$. Soient $C_1, C_2 > 0$.
On considère :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ R & \longmapsto & \dfrac{C_1}{R^{\alpha}} + C_2 R^{\beta}. \end{array} \right.$$

**1.** Montrer que $f$ admet un minimum atteint en un réel $R_0 > 0$ et calculer $f(R_0)$.

**2. (a)** Déterminer $R_1 > 0$ tel que :

$$\frac{C_1}{{R_1}^{\alpha}} = C_2 {R_1}^{\beta}.$$

**(b)** Que dire de $R_0$ et $R_1$ ? de $f(R_0)$ et $f(R_1)$ ?

*indication*

**1.** Étudier la fonction $f$ : signe de la dérivée et variations.

*résultat*

**1.** $R_0 = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\dfrac{C_1}{C_2}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$ et $f(R_0) = \left[ \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} + \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \right] {C_1}^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} {C_2}^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$.

**2.** $R_1 = \left(\dfrac{C_1}{C_2}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$ et $f(R_0) = 2 {C_1}^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} {C_2}^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$.

## Exercice 8.11

Soient $p, q \in ]1, +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Soient $a, b > 0$.

**1.** Montrer que :

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

**2.** On considère

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varepsilon & \longmapsto & \dfrac{\varepsilon^p a^p}{p} + \dfrac{b^q}{\varepsilon^q q} \end{array} \right.$$

**(a)** Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad ab \leqslant f(\varepsilon)$$

**(b)** Montrer que $f$ admet un minimum et le déterminer.

**3.** Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists C_{\varepsilon,p} > 0 : \quad ab \leqslant \varepsilon a^p + C_{\varepsilon,p} b^q.$$

*indication*

**1.** Utiliser la convexité de la fonction exponentielle.

**2.** **(a)** Utiliser la question précédente avec $a \leftarrow \varepsilon a$ et $b \leftarrow \dfrac{b}{\varepsilon}$.

**(b)** Dériver $f$, déterminer le tableau de signes de $f'$ et le tableau de variations de $f$.

**3.** Utiliser la première question avec $a \leftarrow \varepsilon^{\frac{1}{p}a}$ et $b \leftarrow \dfrac{b}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}$.

## Exercice 8.12

Soit $p \geqslant 2$.

**1.** À l'aide de la fonction $t \longmapsto (t^2+1)^{\frac{p}{2}} - t^p - 1$, montrer que :

$$\forall x, y \geqslant 0, \quad x^p + y^p \leqslant (x^2+y^2)^{\frac{p}{2}}.$$

**2.** Montrer que :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad (a^2+b^2)^{\frac{p}{2}} \leqslant 2^{\frac{p}{2}-1}\left(|a|^p + |b|^p\right).$$

**3.** Conclure que :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leqslant \frac{|a|^p + |b|^p}{2}.$$

*indication*

**1.** Étudier la fonction proposée et appliquer l'inégalité obtenue avec $t \leftarrow \dfrac{x}{y}$ (dans le cas $y \neq 0$).

**2.** Utiliser la convexité de la fonction $x \longmapsto |x|^{\frac{p}{2}}$ avec les points $a^2$ et $b^2$.

**3.** Combiner les deux inégalités précédentes en utilisant que $|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$.