William GREGORY

Colle 9 • INDICATIONS
Fonctions

Exercice 9.1

1. Montrer que :

$$\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leqslant x.$$

2. Montrer que :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

indication

1. Étudier $f : x \longmapsto x - \ln(1+x)$.
2. Écrire sous forme exponentielle les deux termes de l'encadrement et appliquer la première question.

Exercice 9.2

Montrer que :

$$\forall x \geqslant 0, \quad \sinh(x) \geqslant x.$$

Exercice 9.3

Montrer que :

$$\forall t > -1, \quad \frac{t}{1+t} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t.$$

indication

L'une des inégalités peut se faire par convexité et les deux peuvent se faire par étude de fonction.

Exercice 9.4

Soient $\alpha, \beta > 0$. Soient $C_1, C_2 > 0$.
On considère :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ R & \longmapsto & \dfrac{C_1}{R^\alpha} + C_2 R^\beta. \end{array} \right.$$

1. Montrer que f admet un minimum atteint en un réel $R_0 > 0$ et calculer $f(R_0)$.

2. **(a)** Déterminer $R_1 > 0$ tel que :

$$\frac{C_1}{{R_1}^\alpha} = C_2 {R_1}^\beta.$$

(b) Que dire de R_0 et R_1 ? de $f(R_0)$ et $f(R_1)$?

indication

1. Étudier la fonction f : signe de la dérivée et variations.

résultat

1. $R_0 = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\dfrac{C_1}{C_2}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$ et $f(R_0) = \left[\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} + \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\right] {C_1}^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} {C_2}^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$.

2. $R_1 = \left(\dfrac{C_1}{C_2}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$ et $f(R_0) = 2{C_1}^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} {C_2}^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$.

Exercice 9.5

Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Soient $a, b > 0$.

1. Montrer que :

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

2. On considère

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varepsilon & \longmapsto & \dfrac{\varepsilon^p a^p}{p} + \dfrac{b^q}{\varepsilon^q q} \end{array} \right.$$

(a) Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad ab \leqslant f(\varepsilon)$$

(b) Montrer que f admet un minimum et le déterminer.

3. Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists C_{\varepsilon,p} > 0 : \quad ab \leqslant \varepsilon a^p + C_{\varepsilon,p} b^q.$$

indication

1. Utiliser la convexité de la fonction exponentielle.

2. **(a)** Utiliser la question précédente avec $a \leftarrow \varepsilon a$ et $b \leftarrow \dfrac{b}{\varepsilon}$.

(b) Dériver f, déterminer le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f.

3. Utiliser la première question avec $a \leftarrow \varepsilon^{\frac{1}{p}a}$ et $b \leftarrow \frac{b}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}$.

Exercice 9.6

Soit $x \in \mathbb{R}$.
Calculer les limites lorsque $n \to +\infty$ de :

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad \left(1+\frac{x}{n^2}\right)^n.$$

indication

Écrire les quantités étudiées avec l'exponentielle puis passer au logarithme. Ensuite, on pourra établir une inégalité comme :

$$\forall t \in \left]-1,+\infty\right[, \quad \frac{t}{1+t} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t.$$

résultat

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad \left(1+\frac{x}{n^2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Exercice 9.7

Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ le système d'équations

$$\begin{cases} \mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x = 0 \\ x\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^x = 0. \end{cases}$$

indication

Se ramener à l'équation $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + \frac{\mathrm{e}^x}{x} = 0$, en trouver une solution et réaliser une étude de fonction pour montrer que c'est la seule.

résultat

L'unique solution du système est $(x,y) = (-1,-1)$.

Exercice 9.8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \dots, x_n > 0$.
Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$. On pose $\alpha := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.
Montrer que :

$$\frac{1}{\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{x_k}} \leqslant \sqrt[\alpha]{\prod_{k=1}^n {x_k}^{\alpha_k}} \leqslant \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k.$$

indication

Utiliser l'inégalité de Jensen avec la fonction $\ln(\cdot)$ pour l'inégalité de droite avec les poids $\dfrac{\alpha_k}{\alpha}$. Appliquer l'inégalité de droite à $x_k \leftarrow \dfrac{1}{x_k}$ pour montrer l'inégalité de gauche.

Exercice 9.9

Soit $p \geqslant 2$.

1. À l'aide de la fonction $t \longmapsto (t^2+1)^{\frac{p}{2}} - t^p - 1$, montrer que :
$$\forall x, y \geqslant 0, \quad x^p + y^p \leqslant (x^2+y^2)^{\frac{p}{2}}.$$

2. Montrer que :
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad (a^2+b^2)^{\frac{p}{2}} \leqslant 2^{\frac{p}{2}-1}\left(|a|^p + |b|^p\right).$$

3. Conclure que :
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leqslant \frac{|a|^p+|b|^p}{2}.$$

indication

1. Étudier la fonction proposée et appliquer l'inégalité obtenue avec $t \leftarrow \dfrac{x}{y}$ (dans le cas $y \neq 0$).

2. Utiliser la convexité de la fonction $x \longmapsto |x|^{\frac{p}{2}}$ avec les points a^2 et b^2.

3. Combiner les deux inégalités précédentes en utilisant que $|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2+|b|^2)$.

Exercice 9.10

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{B}_n(f) := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{B}_n^k$ où
$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \forall x \in [0,1], \quad \mathrm{B}_n^k(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

1. Montrer que $\mathrm{B}_1(f)$ et $\mathrm{B}_2(f)$ sont convexes.

2. Soit $n \geqslant 3$.

(a) Montrer que :
$$\forall x \in [0,1], \quad \mathrm{B}_n(f)''(x) = n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\left[f\left(\frac{k+2}{n}\right) - 2\,f\left(\frac{k+1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\mathrm{B}_{n-2}^k(x).$$

(b) En déduire que $\mathrm{B}_n(f)$ est convexe.

indication

1. Calculer explicitement $\mathrm{B}_1(f)''$ et $\mathrm{B}_2(f)''$. Pour $\mathrm{B}_2(f)$, la convexité de f donne que $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(0)+f(1)}{2}$ en remarquant que $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \times 0 + \dfrac{1}{2} \times 1$.

2. **(a)** Cette question est calculatoire et technique.
Pour calculer $(\mathrm{B}_n^k)''$, on distinguera les cas $k \in [\![2, n-2]\!]$ et les autres.

(b) Comme dans la première question, il s'agit de montrer que :

$$\forall k \in [\![0, n-2]\!], \quad f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{k+2}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right)\right].$$

On trouvera une correction rédigée de cet exercice ici : `https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholle%202%20MP2corrige#page=6`.