William GREGORY

Colle 10

Groupes, Anneaux et corps, Intégrales

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant mercredi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Calculs d'intégrales

Exercice 10.1

Soient $p, q \in \mathbb{Z}$. Calculer :

$$\mathrm{I}_{p,q} := \int_0^{2\pi} \sin(pt)\sin(qt)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 10.2

Calculer :

$$\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 10.3

On admet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de

$$J(n) := \lim_{A \to +\infty} \int_0^A t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Déterminer l'expression de $J(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10.4

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Calculer :

$$\int_1^4 x^a \ln(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 10.5

Soit $x \geqslant 1$. Calculer :

$$\int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \int_1^x \ln(t)^2\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_1^x \ln(t)^3\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 10.6

Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \int_0^\pi (at+bt^2)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}.$$

Groupes, anneaux et corps

Exercice 10.7

Soit $(G, *, \mathrm{e})$ un groupe.

> *On appelle* centre de G *l'ensemble* $\mathrm{Z}(G) := \{g \in G \mid \forall h \in G,\ g * h = h * g\}$.

1. Montrer que $\mathrm{Z}(G)$ est un sous-groupe de G.

2. Montrer que :

$$\forall g \in G, \quad \forall h \in \mathrm{Z}(G), \quad g * h * g^{-1} \in \mathrm{Z}(G).$$

Exercice 10.8

Soit G un groupe. Soit H un sous-groupe de G. Soient $a, b \in G$. On définit :

$$aH := \{ah \ ;\ h \in H\}$$
$$bH := \{bh \ ;\ h \in H\}.$$

Montrer que aH et bH sont égaux ou disjoints.

Exercice 10.9

Soit L un sous-corps de $\mathbb{C}$. Montrer que $\mathbb{Q} \subset L$.

Exercice 10.10

On considère les anneaux :

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \left\{a + b\sqrt{2} \ \middle|\ a, b \in \mathbb{Z}\right\},$$
$$\mathbb{Z}[\sqrt{3}] := \left\{a + b\sqrt{3} \ \middle|\ a, b \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Montrer qu'il n'existe pas de morphisme d'anneaux entre $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ et $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

Exercice 10.11

Pour $d \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$A(d) := \left\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \ \middle|\ y \equiv x \ [d]\right\}.$$

1. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $A(d)$ est un sous-anneau de l'anneau produit $\mathbb{Z}^2$.

2. Soit B un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$.
Montrer que l'ensemble

$$H := \left\{x \in \mathbb{Z} \ \middle|\ (x, 0) \in B\right\}$$

est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

3. **(a)** Soit G un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $G = n\mathbb{Z}$.

(b) Montrer que tout sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$ est de la forme $A(d)$.

Exercice 10.12

On considère :

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \left\{a + b\sqrt{2} \ \middle|\ a, b \in \mathbb{Z}\right\} \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \left\{a + b\sqrt{2} \ \middle|\ a, b \in \mathbb{Q}\right\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est un corps.

2. L'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est-il un corps ?

3. Pour $x := a + b\sqrt{2}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$, on pose $\mathrm{N}(x) := a^2 - 2b^2$.

(a) Soit $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Montrer que :

$$x \text{ est inversible dans } \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \iff \mathrm{N}(x) = \pm 1.$$

(b) Déterminer $x_0 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ tel que $\mathrm{N}(x_0) = \pm 1$ avec $x_0 \neq 1$.

(c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ${x_0}^n$ est inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.