Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2025 – 2026

William GREGORY

Colle 10 • INDICATIONS

Groupes, Anneaux et corps, Intégrales

Exercice 10.1

Soient $p, q \in \mathbb{Z}$. Calculer :

$$\mathrm{I}_{p,q} := \int_0^{2\pi} \sin(pt)\sin(qt)\,\mathrm{d}t.$$

indication

Écrire $\sin(pt)\sin(qt) = \dfrac{\cos((p-q)t) - \cos((p+q)t)}{2}$.

résultat

$$\mathrm{I}_{p,q} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p = 0 \text{ ou } q = 0 \\ \pi & \text{si} \quad p = q \\ -\pi & \text{si} \quad p = -q \\ 0 & \text{si} \quad p \neq \pm q. \end{cases}$$

Exercice 10.2

Calculer :

$$\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t.$$

indication

Procéder par intégration par parties, en utilisant que $\dfrac{2t^2}{1+t^2} = 2 - \dfrac{2}{1+t^2}$.

résultat

$$\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 10.3

On admet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de

$$J(n) := \lim_{A\to+\infty} \int_0^A t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Déterminer l'expression de $J(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

indication

Calculer $J(0)$ et exprimer, par intégration par parties, $J(n+1)$ en fonction de $J(n)$ puis raisonner par récurrence.

résultat

$$J(n) = n!.$$

Exercice 10.4

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Calculer :

$$\int_1^4 x^a \ln(x)\,\mathrm{d}x.$$

indication

Procéder par intégration par parties.

résultat

$$\int_1^4 x^a \ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(a+1)^2} - \frac{4^{a+1}}{(a+1)^2} + \frac{4^{a+1}}{a+1}\ln(4).$$

Exercice 10.5

Soit $x \geqslant 1$. Calculer :

$$\int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t, \quad \int_1^x \ln(t)^2\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_1^x \ln(t)^3\,\mathrm{d}t.$$

indication

Procéder par intégrations par parties successives.

résultat

- $\displaystyle\int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t = x\ln(x) - x + 1$;
- $\displaystyle\int_1^x \ln(t)^2\,\mathrm{d}t = x\ln(x)^2 - 2x\ln(x) - 2x - 2$;
- $\displaystyle\int_1^x \ln(t)^3\,\mathrm{d}t = x\ln(x)^3 - 2x\ln(x)^2 + 3x\ln(x) + x + 3$ (à vérifier).

Exercice 10.6

Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^\pi (at + bt^2)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}.$$

indication

Procéder par double intégration par parties ou déterminer une relation de récurrence.

résultat

$$a = -1 \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{2\pi}.$$

Exercice 10.7

Soit $(G, *, e)$ un groupe.

> *On appelle* centre de G *l'ensemble* $\mathrm{Z}(G) \coloneqq \{g \in G \quad | \quad \forall h \in G, \;\; g * h = h * g\}$.

1. Montrer que $\mathrm{Z}(G)$ est un sous-groupe de G.

2. Montrer que :

$$\forall g \in G, \quad \forall h \in \mathrm{Z}(G), \quad g * h * g^{-1} \in \mathrm{Z}(G).$$

Exercice 10.8

Soit G un groupe. Soit H un sous-groupe de G.
Soient $a, b \in G$. On définit :

$$aH \coloneqq \{ah \;\; ; \;\; h \in H\}$$
$$bH \coloneqq \{bh \;\; ; \;\; h \in H\}.$$

Montrer que aH et bH sont égaux ou disjoints.

indication

Raisonner sur l'intersection. Avec $x \in aH \cap bH$, montrer que $b^{-1}a \in H$. Deux cas se distinguent alors :

- ou bien $b^{-1}a \notin H$: dans ce cas, l'intersection est vide ;
- ou bien $b^{-1}a \in H$: montrer que $aH = bH$, en faisant apparaître $b^{-1}a$ et son symétrique $(b^{-1}a)^{-1} = a^{-1}b$.

On peut aussi raisonner avec des classes d'équivalence : aH et bH sont des classes d'équivalence pour une certaine relation (à écrire), or les classes d'équivalence forment une partition de l'ensemble considéré.

Exercice 10.9

Soit L un sous-corps de $\mathbb{C}$. Montrer que $\mathbb{Q} \subset L$.

indication

- Puisque $1 \in L$, alors $\mathbb{Z} \subset L$.
- Les éléments non nuls de L étant inversibles, les inverses des entiers relatifs (sauf 0) sont inversibles.
- Les multiples entiers des éléments $\frac{1}{q}$ avec $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ sont donc dans L.

Exercice 10.10

On considère les anneaux :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[\sqrt{2}] &:= \left\{ a + b\sqrt{2} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \right\}, \\ \mathbb{Z}[\sqrt{3}] &:= \left\{ a + b\sqrt{3} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \right\}. \end{aligned}$$

Montrer qu'il n'existe pas de morphisme d'anneaux entre $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ et $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

indication

Si un tel morphisme existait, regarder l'image de $\sqrt{2}$ en remarquant que l'image d'un carré est un carré. Aboutir à une contradiction avec l'irrationalité de $\sqrt{3}$.

Exercice 10.11

Pour $d \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$A(d) := \left\{ (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; y \equiv x \ [d] \right\}.$$

1. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $A(d)$ est un sous-anneau de l'anneau produit $\mathbb{Z}^2$.

2. Soit B un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$.
Montrer que l'ensemble

$$H := \left\{ x \in \mathbb{Z} \;\middle|\; (x, 0) \in B \right\}$$

est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

3. **(a)** Soit G un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $G = n\mathbb{Z}$.
(b) Montrer que tout sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$ est de la forme $A(d)$.

indication

2. On peut raisonner avec l'image réciproque.
3. **(a)** On utilisera notamment la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.
(b) Après avoir fixé d tel que $H = d\mathbb{Z}$, utiliser la stabilité par $-$ d'un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$.

Exercice 10.12

On considère :

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \left\{ a + b\sqrt{2} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \left\{ a + b\sqrt{2} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Q} \right\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est un corps.

2. L'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est-il un corps ?

3. Pour $x := a + b\sqrt{2}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$, on pose $\mathrm{N}(x) := a^2 - 2b^2$.

(a) Soit $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Montrer que :

$$x \text{ est inversible dans } \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \iff \mathrm{N}(x) = \pm 1.$$

(b) Déterminer $x_0 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ tel que $\mathrm{N}(x_0) = \pm 1$ avec $x_0 \neq 1$.

(c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ${x_0}^n$ est inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

indication

1. Vérifier que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$ et que tout élément non nul de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est inversible. Pour ce dernier point, penser à utiliser la quantité conjuguée.
2. La preuve précédente permet de déterminer des exemples d'éléments non inversibles dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
3. **(a)** Vérifier au préalable que, pour tout $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $\mathrm{N}(xy) = \mathrm{N}(x) \times \mathrm{N}(y)$.
   (b) L'élément $x_0 = 1 + \sqrt{2}$ convient.
   (c) Par récurrence sur la propriété multiplicative.