Colle 13

Calcul intégral, Nombres réels, Suites

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant mercredi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Calcul intégral

Exercice 13.1

Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on définit la fonction

$$\mathrm{f}_{p,q} : \left| \begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varepsilon & \longmapsto & \displaystyle\int_\varepsilon^1 t^p \ln(t)^q \,\mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

On note $\mathrm{I}_{p,q} := \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mathrm{f}_{p,q}(\varepsilon)$.
Déterminer l'expression de $\mathrm{I}_{p,q}$ en fonction de p et de q.

Exercice 13.2

Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Déterminer une primitive de la fonction :

$$t \longmapsto \frac{1}{t-\lambda}.$$

Exercice 13.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx)\cos^n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 13.4

1. Soit f une fonction continue sur $[0,\pi]$ à valeurs réelles vérifiant

$$\forall x \in [0,\pi], \quad f(\pi - x) = f(x).$$

Montrer que :

$$\int_0^\pi x\,f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 13.5

Déterminer une primitive de la fonction

$$t \longmapsto \frac{1}{1+\tan(t)}.$$

Exercice 13.6

Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^\pi (at+bt^2)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}.$$

Nombres réels

Exercice 13.7

Soit $T > 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\exists!(k, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} : \quad \begin{cases} x = kT + r \\ r \in [0, T[. \end{cases}$$

Exercice 13.8

Soit G un sous-groupe additif de $(\mathbb{R}, +)$.
On suppose que $G \neq \{0\}$ et $\inf(G \cap \mathbb{R}_+^*) = 0$.
Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 13.9

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

> *Pour $x \in \mathbb{R}$, on appelle la* distance de x à A *la quantité*
> $$\mathrm{d}(x, A) := \inf\left\{|x - a| \ ; \ a \in A\right\}.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la quantité $\mathrm{d}(x, A)$ est correctement définie.

2. Montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \left|\mathrm{d}(x, A) - \mathrm{d}(y, A)\right| \leqslant |x - y|.$$

Suites

Exercice 13.10

1. Montrer que :

$$\forall x > 0, \ \ x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1 + x) \leqslant x.$$

2. Étudier la nature de la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

Exercice 13.11

Soit $m \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\sigma \in \mathbb{R}$.
Soit $(v_n)_{n \geqslant 0}$ telle que :

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = m^2 v_n + \sigma^2 m^n. \end{cases}$$

1. Déterminer le terme général de la suite $(v_n)_n$.

2. Soit $p \in]0, 1[$. On prend $m = \dfrac{1 - p}{p}$.

Déterminer la nature de $(v_n)_n$ en fonction de p.

Exercice 13.12

Soit $\theta \in]0, \pi[$. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - 2\cos(\theta)\, u_{n+1} + u_n = 0. \end{cases}$$

Exercice 13.13

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

1. (a) Montrer que :

$$u_n \longrightarrow \ell \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k \longrightarrow \ell.$$

(b) Étudier la réciproque.

2. Montrer que :

$$u_{n+1} - u_n \longrightarrow \ell \quad \Longrightarrow \quad \frac{u_n}{n} \longrightarrow \ell.$$

3. On suppose désormais que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ u_n > 0 \quad \text{et} \quad \ell > 0.$$

Montrer que :

$$u_n \longrightarrow \ell \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} u_k} \longrightarrow \ell.$$