Colle 13 • INDICATIONS

Calcul intégral, Nombres réels, Suites

Exercice 13.1

Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on définit la fonction

$$\mathrm{f}_{p,q} : \left| \begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varepsilon & \longmapsto & \displaystyle\int_\varepsilon^1 t^p \ln(t)^q \, \mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

On note $\mathrm{I}_{p,q} := \lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{f}_{p,q}(\varepsilon)$.
Déterminer l'expression de $\mathrm{I}_{p,q}$ en fonction de p et de q.

indication

- Calculer $I_{p,0}$.
- Pour $q \geqslant 1$, exprimer $\mathrm{I}_{p,q}$ en fonction de p, de q et de $\mathrm{I}_{p,q-1}$, par intégration par parties.
- En déduire l'expression par récurrence sur q.

résultat

- $\mathrm{I}_{p,0} = \dfrac{1}{p+1}$.
- $\mathrm{I}_{p,q} = \dfrac{-q}{p+1} \mathrm{I}_{p,q-1}$.
- $\mathrm{I}_{p,q} = (-1)^q \dfrac{q!}{(p+1)^{q+1}}$.

Exercice 13.2

Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Déterminer une primitive de la fonction :

$$t \longmapsto \frac{1}{t-\lambda}.$$

indication

On note $a := \mathfrak{Re}(\lambda)$ et $b := \mathfrak{Im}(\lambda)$ et on a

$$\frac{1}{t-\lambda} = \frac{t-\overline{\lambda}}{t^2 - 2at + |\lambda|^2}.$$

Or, $t^2 - 2at + |\lambda|^2 = (t-a)^2 + b^2$ donc, pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_0^x \frac{1}{t-\lambda} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{2t-2a}{t^2 - 2at + |\lambda|^2} \, \mathrm{d}t + \mathrm{i}b \int_0^x \frac{1}{(t-a)^2 + b^2} \, \mathrm{d}t.$$

La première intégrale est de la forme $\int \frac{u'}{u}$ et la deuxième se calcule par changement variable $u = \frac{t-a}{b}$ de façon à reconnaître la dérivée d'une arctangente.

résultat

$$x \longmapsto \ln\Big(|x-\lambda|\Big) + \mathrm{i}\arctan(x - \mathfrak{Re}(\lambda)\mathfrak{Im}(\lambda)).$$

Exercice 13.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx)\cos^n(x)\,\mathrm{d}x.$$

indication

On a $\cos(nx) = \mathfrak{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx})$ et $\cos^n(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^n$, donc, par la formule du binôme de Newton et la linéarité de l'intégrale, on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx)\cos^n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathfrak{Re}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x\right).$$

résultat

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx)\cos^n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Exercice 13.4

1. Soit f une fonction continue sur $[0,\pi]$ à valeurs réelles vérifiant

$$\forall x \in [0,\pi], \quad f(\pi - x) = f(x).$$

Montrer que :

$$\int_0^{\pi} x\,f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

indication

1. Changement de variable $x = \pi - u$.

2. Utiliser la question précédente, reconnaître une dérivée en cherchant du côté de $\arctan(\cdots)$.

résultat

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}.$$

Exercice 13.5

Déterminer une primitive de la fonction

$$t \longmapsto \frac{1}{1+\tan(t)}.$$

indication

Deux méthodes possibles (au moins).

- Effectuer le changement de variable $u = \tan(t)$ et effectuer une décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{1+u}\frac{1}{1+u^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+u} + \frac{-u+1}{1+u^2}\right).$$

- Remarquer que $\frac{1}{1+\tan(t)} = \frac{\cos(t)}{\cos(t)+\sin(t)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos(t)-\sin(t)}{\cos(t)+\sin(t)}+1\right)$ et effectuer le changement de variable $u = \cos(t)+\sin(t)$.

résultat

$$x \longmapsto \frac{1}{2}\ln\left|\sin(x)+\cos(x)\right| + \frac{x}{2}.$$

Exercice 13.6

Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{\pi} (at+bt^2)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}.$$

indication

Procéder par double intégration par parties ou déterminer une relation de récurrence.

résultat

$$a = -1 \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{2\pi}.$$

Exercice 13.7

Soit $T > 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\exists!(k,r) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{R} : \quad \begin{cases} x = kT + r \\ r \in [0, T[\end{cases}$$

indication

- Existence : poser $k := \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor$ et $r := x - kT$ puis utiliser les propriétés de la partie entière.
- Unicité : se donner (k,r) et (k',r') vérifiant les conditions et obtenir la relation $(k-k')T = r'-r$, imposant que $r'-r$ soit un multiple de T, mais $r'-r \in \left]-T, T\right[$.

Exercice 13.8

Soit G un sous-groupe additif de $(\mathbb{R}, +)$.
On suppose que $G \neq \{0\}$ et $\inf(G \cap \mathbb{R}_+^*) = 0$.
Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.

indication

- Justifier l'existence de la borne inférieure considérée par la propriété fondamentale de $\mathbb{R}$.
- Utiliser la propriété d'adhérence de la borne inférieure :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists a_\varepsilon \in G \cap \mathbb{R}_+^* : \quad 0 < a_\varepsilon < \varepsilon.$$

- Se donner $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, fixer le a_ε précédent et montrer que :

$$\exists n_x \in \mathbb{Z} : \quad n_x a_\varepsilon \leqslant x \leqslant (n_x + 1) a_\varepsilon.$$

- On obtient donc $|x - n_x a_\varepsilon| < \varepsilon$, ce qui conclut.

Exercice 13.9

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

> *Pour* $x \in \mathbb{R}$*, on appelle la* distance de x à A *la quantité*
> $$d(x, A) := \inf \Big\{ |x - a| \ ; \ a \in A \Big\}.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la quantité $d(x, A)$ est correctement définie.

2. Montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \Big| d(x, A) - d(y, A) \Big| \leqslant |x - y|.$$

indication

1. Utiliser la propriété fondamentale de $\mathbb{R}$.

2. Écrire que :

$$\forall a \in A, \quad |x - a| \leqslant |x - y| + |y - a|,$$

puis en déduire que :

$$\forall a \in A, \quad d(x, A) - |x - y| \leqslant |y - a|,$$

pour conclure que $d(x, A) - d(y, A) \leqslant |x - y|$.
Montrer l'autre inégalité en appliquant à $x \leftarrow y$ et $y \leftarrow x$.

Exercice 13.10

1. Montrer que :

$$\forall x > 0, \quad x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$

2. Étudier la nature de la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

indication

1. On peut réaliser des études de fonctions. L'une s'établit directement par convexité.

2. On pose $v_n := \ln(u_n)$ et on étudie la suite $(v_n)_n$, avant de conclure pour $(u_n)_n$ par passage à l'exponentielle.

résultat

$$u_n \longrightarrow e^{\frac{1}{2}}.$$

Exercice 13.11

Soit $m \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\sigma \in \mathbb{R}$.
Soit $(v_n)_{n \geqslant 0}$ telle que :

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = m^2 v_n + \sigma^2 m^n. \end{cases}$$

1. Déterminer le terme général de la suite $(v_n)_n$.

2. Soit $p \in]0,1[$. On prend $m = \dfrac{1-p}{p}$.

Déterminer la nature de $(v_n)_n$ en fonction de p.

indication

1. Conjecturer v_n à l'aide de v_{n-1}, v_{n-2}, ..., jusqu'à faire apparaître $v_0 = 0$. Vérifier la conjecture par récurrence.
On peut aussi, en considérant $u_n := \dfrac{v_n}{m^n}$, déterminer le terme général de $(u_n)_n$ (suite arithmético-géométrique).

2. La disjonction de cas en p se déduit de la disjonction de cas en m ($m < 1$, $m = 1$ et $m > 1$).

résultat

1. $$\begin{cases} v_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \sigma^2 m^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} m^k. \end{cases}$$

2.

	$p < \frac{1}{2}$	$p = \frac{1}{2}$	$p < \frac{1}{2}$
m	> 1	1	< 1
$\lim_{n \to +\infty} v_n$	$+\infty$	$+\infty$	$0.$

Exercice 13.12

Soit $\theta \in]0, \pi[$. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - 2\cos(\theta)\, u_{n+1} + u_n = 0. \end{cases}$$

indication

Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $r^2 - 2\cos(\theta)\, r + 1 = 0$.

résultat

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \cos(n\theta) + \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin(n\theta) = \frac{\cos\left((2n-1)\frac{\theta}{2}\right)}{\frac{\theta}{2}}.$$

Exercice 13.13

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

1. **(a)** Montrer que :

$$u_n \longrightarrow \ell \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \longrightarrow \ell.$$

(b) Étudier la réciproque.

2. Montrer que :

$$u_{n+1} - u_n \longrightarrow \ell \quad \Longrightarrow \quad \frac{u_n}{n} \longrightarrow \ell.$$

3. On suppose désormais que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n > 0 \quad \text{et} \quad \ell > 0.$$

Montrer que :

$$u_n \longrightarrow \ell \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} u_k} \longrightarrow \ell.$$

indication

1. **(a)** Revenir à la définition quantifiée de convergence d'une suite, en coupant la somme en deux parties (avant N_ε et après N_ε).

(b) Prendre comme contre-exemple une suite non convergente très classique.

2. Utiliser **1.(a)** avec la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Regarder ce qu'il se passe pour la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$.