Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2025 – 2026

William GREGORY

Colle 14

Suites

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant mercredi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Exercice 14.1

Montrer que la suite de terme général
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$$
converge.

Exercice 14.2

Soit $\theta \in]0, \pi[$. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_n$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - 2\cos(\theta)\, u_{n+1} + u_n = 0. \end{cases}$$

Exercice 14.3

Soient $p, q \in]0, 1[$.
Soient $a_0, a_1 \in]0, 1[$ tels que $a_0 + a_1 = 1$.

1. Déterminer le terme général de la suite $(p_n)_n$ définie par :
$$\begin{cases} p_0 := a_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} := (1 - p - q)p_n + q. \end{cases}$$

2. Déterminer le terme général de $(1 - p_n)_n$ en fonction de a_1.

3. On suppose que $|1 - p - q| < 1$.
Déterminer les limites des suites $(p_n)_n$ et $(1 - p_n)_n$.

Exercice 14.4

1. Montrer que :
$$\forall x > 0, \qquad \frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$

2. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Déterminer la nature de la suite de terme général $\displaystyle\sum_{\ell=n+1}^{kn} \frac{1}{\ell}$.

Exercice 14.5

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad (f \circ f)(x) = 6x - f(x).$$

Exercice 14.6

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On définit la suite $(z_n)_n$ par :

$$\begin{cases} z_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}. \end{cases}$$

Montrer que $(z_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 14.7

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n := \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} \quad \text{et} \quad v_n := (n+1){u_n}^2.$$

Montrer que $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 14.8

On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, l'équation :

$$x + \tan(x) = n \tag{E_n}$$

d'inconnue $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (E_n) admet une unique solution, que l'on notera x_n.

2. Montrer que $(x_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 14.9

On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, l'équation :

$$x^n \ln(x) = 1 \tag{E_n}$$

d'inconnue $x \in]0, +\infty[$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (E_n) admet une unique solution, que l'on notera x_n.

2. Montrer que $(x_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 14.10

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n := \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que $(u_n)_n$ converge.

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2n} < \frac{u_n}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

3. Déterminer la limite de $(u_n)_n$.

Exercice 14.11

Étudier la suite $(x_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \mathrm{e}^{x_n} - 1. \end{cases}$$

Indication. On pourra établir l'inégalité :

$$\forall x \geqslant 0, \quad \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

Exercice 14.12

On définit la suite $(u_n)_n$ par :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n \,\mathrm{e}^{-u_n}. \end{cases}$$

1. Montrer que $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n := \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.

(a) Montrer que $v_n \longrightarrow 1$.

(b) Montrer que :

$$\frac{v_0 + \cdots + v_{n-1}}{n} \longrightarrow 1.$$

(c) En déduire un équivalent de u_n.