Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2025 – 2026

William GREGORY

Colle 14 • INDICATIONS
Suites

Exercice 14.1

Montrer que la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

converge.

indication

En notant $u_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$, montrer que les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont adjacentes.

Exercice 14.2

Soit $\theta \in \,]0,\pi[$. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - 2\cos(\theta)\, u_{n+1} + u_n = 0. \end{cases}$$

indication

Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $r^2 - 2\cos(\theta)\, r + 1 = 0$.

résultat

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \cos(n\theta) + \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin(n\theta) = \frac{\cos\left((2n-1)\frac{\theta}{2}\right)}{\frac{\theta}{2}}.$$

Exercice 14.3

Soient $p, q \in \,]0,1[$.
Soient $a_0, a_1 \in \,]0,1[$ tels que $a_0 + a_1 = 1$.

1. Déterminer le terme général de la suite $(p_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} p_0 := a_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} := (1-p-q)p_n + q. \end{cases}$$

2. Déterminer le terme général de $(1-p_n)_n$ en fonction de a_1.

3. On suppose que $|1-p-q| < 1$.
Déterminer les limites des suites $(p_n)_n$ et $(1-p_n)_n$.

indication

Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique.
On peut aussi raisonner de manière plus élémentaire, par récurrence, en montrant que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = (1-p-q)^n a_0 + q\sum_{j=0}^{n-1}(1-p-q)^j.$$

résultat

1. $p_n = \dfrac{q}{p+q} + (1-p-q)^n\left(a_0 - \dfrac{q}{p+q}\right)$.

2. $1-p_n = \dfrac{p}{p+q} + (1-p-q)^n\left(a_1 - \dfrac{p}{p+q}\right)$.

3. $p_n \longrightarrow \dfrac{q}{p+q}$ et $1-p_n \longrightarrow \dfrac{p}{p+q}$.

Exercice 14.4

1. Montrer que :

$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$

2. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Déterminer la nature de la suite de terme général $\displaystyle\sum_{\ell=n+1}^{kn} \frac{1}{\ell}$.

indication

1. On peut raisonner de plusieurs manières (en fonction de l'avancée dans le programme).

- Méthode la plus rapide et élégante : utiliser le théorème des accroissements finis (chapitre Dérivation).
- Méthode élémentaire : faire deux études de fonctions.
- Méthode mixte : établir par convexité que
$$\forall t > -1, \quad \ln(1+t) \leqslant t,$$
puis utiliser cette inégalité pour établir les deux encadrements, en remarquant notamment que :
$$\ln(x+1) - \ln(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = -\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \quad \text{et} \quad \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}.$$

2. La première question permet d'obtenir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{\ell=n+1}^{kn} \ln(\ell+1) - \ln(\ell) \leqslant \sum_{\ell=n+1}^{kn} \frac{1}{\ell} \leqslant \sum_{\ell=n+1}^{kn} \ln(\ell) - \ln(\ell-1).$$

On peut ensuite appliquer le théorème d'encadrement.

résultat

$$\sum_{\ell=n+1}^{kn} \frac{1}{\ell} \longrightarrow \ln(k).$$

Exercice 14.5

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad (f \circ f)(x) = 6x - f(x).$$

indication

On définit, pour $x \in \mathbb{R}_+$, la suite $(y_n)_n$ telle que :

$$\begin{cases} y_0 = x \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad y_{n+1} = f(y_n). \end{cases}$$

La suite $(y_n)_n$ vérifie une relation de récurrence linéaire du second ordre donc on détermine son terme général.
On n'oubliera pas que f est à valeurs positives.

résultat

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & 2x. \end{array} \right.$$

Exercice 14.6

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On définit la suite $(z_n)_n$ par :

$$\begin{cases} z_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}. \end{cases}$$

Montrer que $(z_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

indication

Écrire $\alpha = Re^{i\theta}$ avec $R \geqslant 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$ et montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = Re^{i\frac{\theta}{2^n}} \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right).$$

La formule de duplication de $\sin(\cdot)$ permet d'exprimer la limite du produit.

résultat

$$z_n \longrightarrow \begin{cases} R & \text{si } \theta = 0 \\ R\dfrac{\sin(\theta)}{\theta} & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{avec } R \geqslant 0 \text{ et } \theta \in]-\pi, \pi] \text{ tels que } \alpha = Re^{i\theta}.$$

Exercice 14.7

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n := \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \quad \text{et} \quad v_n := (n+1){u_n}^2.$$

Montrer que $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

indication

- Montrer que $(u_n)_n$ converge par monotonie.
- De même, montrer que $(v_n)_n$ converge.

- Déterminer la limite de $(u_n)_n$ en exploitant la convergence de $(v_n)_n$.

résultat

$u_n \longrightarrow 0.$

Exercice 14.8

On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, l'équation :

$$x + \tan(x) = n \qquad (\mathrm{E}_n)$$

d'inconnue $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (E_n) admet une unique solution, que l'on notera x_n.

2. Montrer que $(x_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

indication

1. Vérifier que $\left| \begin{array}{rcl} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + \tan(x) \end{array} \right.$ réalise une bijection.

2. Remarquer que $x_n = \arctan(n - x_n)$ et que $n - x_n \longrightarrow +\infty$.

résultat

2. $x_n \longrightarrow \frac{\pi}{2}$.

Exercice 14.9

On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, l'équation :

$$x^n \ln(x) = 1 \qquad (\mathrm{E}_n)$$

d'inconnue $x \in]0, +\infty[$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (E_n) admet une unique solution, que l'on notera x_n.

2. Montrer que $(x_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

indication

1. Dresser le tableau de variation de $f_n : x \longmapsto x^n \ln(x)$ pour montrer que l'équation possède une unique solution et que $x_n \in [1, +\infty[$.

2. En comparant $f_n(x_{n+1})$ et $f_n(x_n)$, montrer que la suite $(x_n)_n$ est décroissante. En déduire que $(x_n)_n$ converge et utiliser la relation $1 = f_n(x_n)$ pour déterminer la limite.

résultat

2. $x_n \longrightarrow 1$.

Exercice 14.10

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n := \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que $(u_n)_n$ converge.

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2n} < \frac{u_n}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

3. Déterminer la limite de $(u_n)_n$.

indication

1. Calculer $u_{n+1} - u_n$ montrer que $(u_n)_n$ est décroissante.

2. Calculer en coupant u_{2n} en deux parties.

3. Encadrer la limite, d'une part par la définition de $(u_n)_n$, d'autre part par la question précédente.

résultat

$$u_n \longrightarrow 0.$$

Exercice 14.11

Étudier la suite $(x_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \mathrm{e}^{x_n} - 1. \end{cases}$$

Indication. On pourra établir l'inégalité :

$$\forall x \geqslant 0, \quad \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

indication

- Déterminer la monotonie de la suite.
- Distinguer les cas $x_0 \leqslant 0$ et $x_0 > 0$.
- Si $x_0 \leqslant 0$, le théorème de la limite monotone donne le résultat.
- Si $x_0 > 0$, établir que $x_{k+1} - x_k \geqslant \dfrac{{x_0}^2}{2}$, puis en déduire que $x_n \longrightarrow +\infty$.

Exercice 14.12

On définit la suite $(u_n)_n$ par :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n \, \mathrm{e}^{-u_n}. \end{cases}$$

1. Montrer que $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n := \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.

(a) Montrer que $v_n \longrightarrow 1$.

(b) Montrer que :

$$\frac{v_0 + \cdots + v_{n-1}}{n} \longrightarrow 1.$$

(c) En déduire un équivalent de u_n.

indication

1. Montrer que la suite est correctement définie et utiliser le théorème de la limite monotone.

2. **(a)** Utiliser que $\mathrm{e}^{u_n} - 1 \sim u_n$.

(b) Utiliser le théorème de Cesàro.

(c) $v_0 + \cdots + v_{n-1} = \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{u_0}$.

résultat

$$u_n \sim \frac{1}{n}.$$