Colle 15

Suites, Comparaisons des suites

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant mercredi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Exercice 15.1

Soit $a > 0$. Laquelle des suites
$$\left(\frac{1}{n^a}\right)_n \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}\right)_n$$
est négligeable devant l'autre ?

Exercice 15.2

Soit $a \in]0,1[$. Laquelle des suites
$$(a^n)_n \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}\right)_n$$
est négligeable devant l'autre ?

Exercice 15.3

Soit $a \in]0,1[$. Soit $b > 0$. Laquelle des suites
$$(a^n)_n \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{n^b}\right)_n$$
est négligeable devant l'autre ?

Exercice 15.4

Soit $a > 0$. Laquelle des suites
$$(a^n)_n \quad \text{et} \quad (n!)_n$$
est négligeable devant l'autre ?

Exercice 15.5

Laquelle des suites
$$(\ln(n)^n)_n \quad \text{et} \quad \left(n^{\ln(n)}\right)_n$$
est négligeable devant l'autre ?

Exercice 15.6

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \sim n!$.

Exercice 15.7

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Montrer que :
$$\ln(n!) = n\ln(n) - \sum_{k=1}^{n-1} k\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

2. En déduire un équivalent de $\ln(n!)$.

Exercice 15.8

On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, l'équation :
$$x^n \ln(x) = 1 \qquad (\mathrm{E}_n)$$
d'inconnue $x \in]0,+\infty[$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (E_n) admet une unique solution $x_n \in [1,+\infty[$.

2. Montrer que $(x_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 15.9

Soit $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n := 2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \quad \text{et} \quad v_n := 2^n \tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right).$$

Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes et déterminer leur limite.

Exercice 15.10

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On définit la suite $(z_n)_n$ par :

$$\begin{cases} z_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}. \end{cases}$$

Montrer que $(z_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 15.11

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n := \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx$.

1. Montrer que $u_n \longrightarrow 1$.

2. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx = \frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx.$$

3. En déduire que

$$u_n = 1 - \frac{\ln(2)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 15.12

Étudier la suite $(x_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ x_{n+1} = e^{x_n} - 1. \end{cases}$$

Indication. On pourra établir l'inégalité :

$$\forall x \geqslant 0, \ e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

Exercice 15.13

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n := \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que $(u_n)_n$ converge.

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2n} < \frac{u_n}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

3. Déterminer la limite de $(u_n)_n$.

Exercice 15.14

On définit la suite $(u_n)_n$ par :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = u_n\, e^{-u_n}. \end{cases}$$

1. Montrer que $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n := \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.

(a) Montrer que $v_n \longrightarrow 1$.

(b) Montrer que :

$$\frac{v_0 + \cdots + v_{n-1}}{n} \longrightarrow 1.$$

(c) En déduire un équivalent de u_n.