Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2025 – 2026

William GREGORY

Colle 15 • INDICATIONS
Suites, Comparaisons des suites

Exercice 15.1

Soit $a > 0$. Laquelle des suites

$$\left(\frac{1}{n^a}\right)_n \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}\right)_n$$

est négligeable devant l'autre ?

résultat

$$\frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}} = o\left(\frac{1}{n^a}\right).$$

Exercice 15.2

Soit $a \in]0,1[$. Laquelle des suites

$$(a^n)_n \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}\right)_n$$

est négligeable devant l'autre ?

résultat

$$a^n = o\left(\frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}\right).$$

Exercice 15.3

Soit $a \in]0,1[$. Soit $b > 0$. Laquelle des suites

$$(a^n)_n \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{n^b}\right)_n$$

est négligeable devant l'autre ?

résultat

$$a^n = o\left(\frac{1}{n^b}\right).$$

Exercice 15.4

Soit $a > 0$. Laquelle des suites

$$(a^n)_n \quad \text{et} \quad (n!)_n$$

est négligeable devant l'autre ?

indication

En posant $u_n := \dfrac{a^n}{n!}$, on peut par exemple montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow 0$ pour en déduire que, à partir d'un certain rang, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$, donc $u_n \longrightarrow 0$ (ce dernier « donc » étant à comprendre et justifier).

résultat

$$a^n = o(n!).$$

Exercice 15.5

Laquelle des suites

$$(\ln(n)^n)_n \quad \text{et} \quad \left(n^{\ln(n)}\right)_n$$

est négligeable devant l'autre ?

résultat

$$n^{\ln(n)} = o(\ln(n)^n).$$

Exercice 15.6

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \sim n!$.

indication

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{n!} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-2} k!.$$

Exercice 15.7

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Montrer que :

$$\ln(n!) = n\ln(n) - \sum_{k=1}^{n-1} k\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

2. En déduire un équivalent de $\ln(n!)$.

indication

1. On a $\displaystyle\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \sum_{k=1}^{n} [k - (k-1)] \ln(k)$.

2. Montrer que $\dfrac{\ln(n!)}{n\ln(n)} \longrightarrow 1$ à l'aide de la formule précédente.

Exercice 15.8

On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, l'équation :

$$x^n \ln(x) = 1 \qquad (\mathrm{E}_n)$$

d'inconnue $x \in]0, +\infty[$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (E_n) admet une unique solution $x_n \in [1, +\infty[$.

2. Montrer que $(x_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

indication

1. Dresser le tableau de variation de $f_n : x \longmapsto x^n \ln(x)$ pour montrer que l'équation possède une unique solution et que $x_n \in [1, +\infty[$.

2.
- En comparant $f_n(x_{n+1})$ et $f_n(x_n)$, montrer que la suite $(x_n)_n$ est décroissante.
- En déduire que $(x_n)_n$ converge.
- Utiliser la relation $1 = f_n(x_n)$ pour déterminer la limite. On pourra remarquer que, si $\ell > 1$, $\ell^n \ln(\ell) \longrightarrow +\infty$.

résultat

2. $x_n \longrightarrow 1$.

Exercice 15.9

Soit $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n := 2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \qquad \text{et} \qquad v_n := 2^n \tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right).$$

Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes et déterminer leur limite.

indication

- On pourra exploiter les relations donnant $\sin(2a)$ et $\tan(2a)$.
- On a $\dfrac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$ (ou directement $\sin(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$).

résultat

$$\lim u_n = \lim v_n = \theta.$$

Exercice 15.10

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On définit la suite $(z_n)_n$ par :

$$\begin{cases} z_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}. \end{cases}$$

Montrer que $(z_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

indication

Écrire $\alpha = Re^{i\theta}$ avec $R \geqslant 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$ et montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = Re^{i\frac{\theta}{2^n}} \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right).$$

La formule de duplication de $\sin(\cdot)$ permet d'exprimer la limite du produit.

résultat

$$z_n \longrightarrow \begin{cases} R & \text{si } \theta = 0 \\ R\dfrac{\sin(\theta)}{\theta} & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{avec } R \geqslant 0 \text{ et } \theta \in]-\pi, \pi] \text{ tels que } \alpha = Re^{i\theta}.$$

Exercice 15.11

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n := \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx$.

1. Montrer que $u_n \longrightarrow 1$.

2. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx = \frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx.$$

3. En déduire que

$$u_n = 1 - \frac{\ln(2)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

indication

1. Majorer $|u_n - 1|$ à l'aide de l'inégalité triangulaire intégrale.

2. Procéder par intégration par parties.

3. Montrer d'abord que $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx \longrightarrow 0$ (à l'aide de $\ln(1+t) \leqslant t$) et remarquer que

$$u_n = 1 - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx.$$

Exercice 15.12

Étudier la suite $(x_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = e^{x_n} - 1. \end{cases}$$

Indication. On pourra établir l'inégalité :

$$\forall x \geqslant 0, \quad e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

indication

- Déterminer la monotonie de la suite.
- Distinguer les cas $x_0 \leqslant 0$ et $x_0 > 0$.

- Si $x_0 \leqslant 0$, le théorème de la limite monotone donne le résultat.
- Si $x_0 > 0$, établir que $x_{k+1} - x_k \geqslant \dfrac{{x_0}^2}{2}$, puis en déduire que $x_n \longrightarrow +\infty$.

Exercice 15.13

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n := \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que $(u_n)_n$ converge.

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2n} < \frac{u_n}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

3. Déterminer la limite de $(u_n)_n$.

indication

1. Calculer $u_{n+1} - u_n$ montrer que $(u_n)_n$ est décroissante.

2. Calculer en coupant u_{2n} en deux parties.

3. Encadrer la limite, d'une part par la définition de $(u_n)_n$, d'autre part par la question précédente.

résultat

$u_n \longrightarrow 0$.

Exercice 15.14

On définit la suite $(u_n)_n$ par :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n \, \mathrm{e}^{-u_n}. \end{cases}$$

1. Montrer que $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n := \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.

(a) Montrer que $v_n \longrightarrow 1$.

(b) Montrer que :

$$\frac{v_0 + \cdots + v_{n-1}}{n} \longrightarrow 1.$$

(c) En déduire un équivalent de u_n.

indication

1. Montrer que la suite est correctement définie et utiliser le théorème de la limite monotone.

2. **(a)** Utiliser que $\mathrm{e}^{u_n} - 1 \sim u_n$.

(b) Utiliser le théorème de Cesàro.

(c) $v_0 + \cdots + v_{n-1} = \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{u_0}$.

résultat

$$u_n \sim \frac{1}{n}.$$