Colle 16
Matrices

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant lundi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Dans tous les exercices, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 16.1

Calculer le noyau de la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ -6 & 0 & 12 \\ 5 & 10 & -10 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$$

Exercice 16.2

Calculer le noyau de la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 & 2 \\ -7 & 5 & 21 & -14 \\ -3 & 4 & 9 & -6 \\ 6 & 1 & -18 & 12 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$$

Exercice 16.3

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On pose :

$$A := \begin{pmatrix} 0 & c & b \\ -c & 0 & a \\ -b & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer α tel que $A^3 = \alpha A$.

2. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, A^n.

Exercice 16.4

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $a, b \in \mathbb{K}$.
On pose $M := a\mathrm{I}_n + b\mathrm{J} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, où :

$$\mathrm{J} := \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}).$$

Déterminer, lorsqu'elle est inversible, l'inverse de M, en fonction de M, I_n, a, b et n.

Exercice 16.5

On définit trois suites $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ par :

$$\begin{cases} u_0, v_0, w_0 \in \mathbb{K} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = v_n - u_n \\ v_{n+1} = w_n - v_n \\ w_{n+1} = v_n - w_n. \end{cases} \end{cases}$$

Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, les expressions de u_n, v_n et w_n, en fonction de n, u_0, v_0 et w_0.

Exercice 16.6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ensemble :

$$\mathrm{Z}(\mathrm{M}_n(\mathbb{K})) := \Big\{ M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \ \Big| \ \forall N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), \ \ MN = NM \Big\}.$$

Exercice 16.7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ *nilpotente*, *i.e.* telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0_n$.
Montrer que $N - \mathrm{I}_n$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 16.8

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que :

$$\mathrm{Ker}(A^\top A) = \mathrm{Ker}(A).$$

2. Le résultat reste-t-il vrai si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$?

Exercice 16.9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que :

$$\exists A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) : \ \ M = A + B.$$

Exercice 16.10

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que :

$$A^2 = AA^\top \quad \Longrightarrow \quad A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 16.11

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = 0_n$.
Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{Tr}\Big((A+B)^k\Big) = \mathrm{Tr}(A^k) + \mathrm{Tr}(B^k).$$