Colle 16 • INDICATIONS
Matrices

Dans tous les exercices, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 16.1

Calculer le noyau de la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ -6 & 0 & 12 \\ 5 & 10 & -10 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$$

résultat

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 16.2

Calculer le noyau de la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 & 2 \\ -7 & 5 & 21 & -14 \\ -3 & 4 & 9 & -6 \\ 6 & 1 & -18 & 12 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$$

résultat

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 16.3

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On pose :

$$A := \begin{pmatrix} 0 & c & b \\ -c & 0 & a \\ -b & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer α tel que $A^3 = \alpha A$.

2. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, A^n.

résultat

$$\alpha = -(a^2 + b^2 + c^2) \quad \text{et} \quad \begin{cases} A^0 = \mathrm{I}_3 \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad A^{2k+1} = \alpha^k A \\ A^2 = \begin{pmatrix} -c^2 - b^2 & -ab & ac \\ -ab & -c^2 - a^2 & -bc \\ -ac & -bc & -b^2 - a^2 \end{pmatrix} \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad A^{2k} = \alpha^{k-1} A^2. \end{cases}$$

Exercice 16.4

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $a, b \in \mathbb{K}$.
On pose $M := a\mathrm{I}_n + b\mathrm{J} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, où :

$$\mathrm{J} := \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}).$$

Déterminer, lorsqu'elle est inversible, l'inverse de M, en fonction de M, I_n, a, b et n.

résultat

$$a = 0 \text{ ou } a + nb = 0 \implies M \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$
$$a \neq 0 \text{ et } a + nb \neq 0 \implies M^{-1} = \frac{(2a + nb)\mathrm{I}_n - M}{a(a + nb)}.$$

Exercice 16.5

On définit trois suites $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ par :

$$\begin{cases} u_0, v_0, w_0 \in \mathbb{K} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = v_n - u_n \\ v_{n+1} = w_n - v_n \\ w_{n+1} = v_n - w_n. \end{cases} \end{cases}$$

Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, les expressions de u_n, v_n et w_n, en fonction de n, u_0, v_0 et w_0.

indication

On pose :

$$X_n := \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

et on montre par récurrence que $X_n = A^n X_0$, où $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{K})$ indépendante de n.

résultat

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} u_n = (-2)^{n-1}(v_0 - w_0) + (-1)^n(u_0 - w_0) \\ v_n = (-2)^{n-1}(w_0 - v_0) \\ w_n = (-2)^{n-1}(v_0 - w_0). \end{cases}$$

Exercice 16.6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ensemble :

$$\mathrm{Z}(\mathrm{M}_n(\mathbb{K})) := \Big\{ M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \;\Big|\; \forall N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}),\;\; MN = NM \Big\}.$$

indication

En se donnant $M \in \mathrm{Z}(\mathrm{M}_n(\mathbb{K}))$, utiliser la définition avec $N = \mathrm{E}_{i,j}$:

$$M\mathrm{E}_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & M_{1,i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_{2,i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & M_{n,i} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{E}_{i,j}M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ M_{j,1} & M_{j,2} & \cdots & M_{j,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

où :

- seule la j-ème colonne de $M\mathrm{E}_{i,j}$ est non nulle ;
- seule la i-ème ligne de $\mathrm{E}_{i,j}M$ est non nulle.

résultat

$$\mathrm{Z}(\mathrm{M}_n(\mathbb{K})) = \{\lambda \mathrm{I}_n \;;\; \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

Exercice 16.7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ *nilpotente*, *i.e.* telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0_n$.
Montrer que $N - \mathrm{I}_n$ est inversible et déterminer son inverse.

indication

Calculer $(\mathrm{I}_n - N) \sum_{k=0}^{p_0 - 1} N^k$ où p_0 désigne l'indice de nilpotence de N (le plus petit entier k tel que $N^k = 0_n$).

résultat

$$(\mathrm{I}_n - N)^{-1} = \sum_{k=0}^{p_0-1} N^k \quad \text{où } p_0 \text{ désigne l'indice de nilpotence de } N.$$

Exercice 16.8

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que :

$$\mathrm{Ker}(A^\top A) = \mathrm{Ker}(A).$$

2. Le résultat reste-t-il vrai si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$?

indication

1.
- L'inclusion $\boxed{\supset}$ se fait sans difficulté.
- Pour $\boxed{\subset}$, on pourra d'abord établir que :

$$\mathrm{Tr}(B^\top B) = 0 \quad \Longrightarrow \quad B = 0_n.$$

2. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$ fournit un contre-exemple.

En revanche, en notant $A = (a_{i,j})_{i,j}$ et $\overline{A} := (\overline{a_{i,j}})_{i,j}$, on a $\mathrm{Ker}(\overline{A}^\top A) = \mathrm{Ker}(A)$.

Exercice 16.9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que :

$$\exists A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) : \quad M = A + B.$$

indication

Écrire M comme somme de deux matrices triangulaires inversibles, l'une inférieure, l'autre supérieure.

Exercice 16.10

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que :

$$A^2 = AA^\top \quad \Longrightarrow \quad A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R}).$$

indication

On pourra montrer que $A - A^\top = 0_n$ à l'aide du critère :

$$\mathrm{Tr}(M^\top M) = 0 \quad \Longrightarrow \quad M = 0_n.$$

Exercice 16.11

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = 0_n$.
Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{Tr}\Big((A+B)^k\Big) = \mathrm{Tr}(A^k) + \mathrm{Tr}(B^k).$$

indication

Il s'agira de comprendre les termes intervenant dans le développement de $(A+B)^k$ et d'utiliser les propriétés de la trace (linéarité et $\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$).
En formalisant, on peut écrire que $(A+B)^k = \displaystyle\sum_{f \in \mathscr{F}\left([\![1,k]\!],\{A,B\}\right)} f(1)\cdots f(k)$.