Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2025 – 2026

William GREGORY

Colle 17 • INDICATIONS
Espaces vectoriels

Exercice 17.1

La famille

$$(X^3 + X, X^2 + 2X + 1, X - 1, 4)$$

est-elle une base de $\mathbb{R}_3[X]$?

résultat

Oui, cette famille est libre et génératrice dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 17.2

La famille

$$\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}\right)$$

est-elle libre ou liée ?

résultat

La famille est libre dans $M_{3,1}(\mathbb{K})$.

Exercice 17.3

La famille

$$\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\2\\-3\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\0\\1\\-7\end{pmatrix}\right)$$

est-elle libre ou liée ?

résultat

La famille est libre dans $M_{4,1}(\mathbb{K})$.

Exercice 17.4

Soit $A \subset \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & 0 \in A \\ \text{(ii)} & \forall x, y \in A, \quad x + y \in A \\ \text{(iii)} & \forall \alpha \in \mathbb{Q}, \quad \forall x \in A, \quad \alpha x \in A. \end{array}$$

On définit :

$$\mathrm{Adh}(A) := \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}} : \; a_n \longrightarrow x \right\}.$$

Montrer que $\mathrm{Adh}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$.

indication

On utilisera la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 17.5

Soit E un espace vectoriel.
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. L'ensemble $F \cup G$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?

2. Montrer que :

$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \quad \Longleftrightarrow \quad F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$

indication

1. Regarder des sous-espaces simples dans $\mathbb{R}^2$.

2. Pour le sens $\boxed{\Rightarrow}$, on pourra raisonner par l'absurde. Le vecteur $x+y$ où $x \in F \setminus G$ et $y \in G \setminus F$ peut être utile.

Exercice 17.6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère les sous-ensembles de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$:

- $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques ;
- $\mathrm{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

Montrer que $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

indication

- Justifier que $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels.
- On montre que $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{A}_n(\mathbb{R})$ avec les deux points suivants :
  - ◊ $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{S}_n(\mathbb{R}) + \mathrm{A}_n(\mathbb{R})$, en écrivant $M = \dfrac{M + M^\top}{2} + \dfrac{M - M^\top}{2}$,
  - ◊ $\mathrm{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{A}_n(\mathbb{R}) = \{0_n\}$.

Exercice 17.7

Soit E un espace vectoriel. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
Soit $(x_1, \dots, x_{k+1})$ une famille de E telle que la famille $(x_1, \dots, x_k)$ est libre.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur x_{k+1} pour que la famille $(x_1, \dots, x_{k+1})$ soit libre.

indication

On raisonne par contraposée pour chaque implication. Cela revient à montrer que :

$$x_{k+1} \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_k) \iff (x_1, \dots, x_{k+1}) \text{ est liée.}$$

résultat

La famille $(x_1, \dots, x_{k+1})$ est libre si, et seulement si, le vecteur x_{k+1} n'est pas combinaison linéaire de x_1, ..., x_k.

Exercice 17.8

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\mathrm{Vect}\Big(x \longmapsto \cos(nx)\Big)_{n \in [\![0,N]\!]} = \mathrm{Vect}\Big(x \longmapsto \cos^n(x)\Big)_{n \in [\![0,N]\!]}.$$

indication

- $\boxed{\subset}$ Penser à la formule de Moivre et au binôme de Newton, puis passer à la partie réelle.
- $\boxed{\supset}$ Exprimer $\cos^n(x)$ à l'aide de la formule d'Euler et du binôme de Newton et passer à la partie réelle.

Exercice 17.9

On note $E := \mathscr{C}^0\big([0,1], \mathbb{R}\big)$ et

$$F := \left\{ f \in E \;\middle|\; \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}.$$

1. Montrer que F est un espace vectoriel.

2. Déterminer un supplémentaire de F dans E.

indication

1. Montrer que c'est un sous-espace vectoriel de E à la main ou (si on connaît la définition) en vérifiant qu'il s'agit d'un hyperplan de E.

2. Écrire que $f = f - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ et montrer que $E = F \oplus G$ où G désigne le sous-espace des fonctions de E constantes.

Exercice 17.10

Soit E un espace vectoriel.
Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de E.
Montrer que pour tout $a \in E \setminus \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, la famille $(e_1 + a, \dots, e_p + a)$ est libre.

indication

Obtenir la relation

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p = -(\lambda_1 + \cdots + \lambda_p)a,$$

et discuter suivant le coefficient devant a.

Exercice 17.11

On considère les fonctions de $\mathscr{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$:

$$f_1 : x \longmapsto \cos(x), \quad f_2 : x \longmapsto x\cos(x),$$
$$f_3 : x \longmapsto \sin(x), \quad f_4 : x \longmapsto x\sin(x).$$

Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre dans $\mathscr{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$.

indication

On pourra évaluer en des valeurs stratégiques de x.

Exercice 17.12

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $f_\lambda : x \longmapsto |x - \lambda|$.
Montrer que la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

indication

On peut raisonner par l'absurde et étudier la dérivabilité.

Exercice 17.13

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts.
Montrer que la famille $\left(t \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda_k t}\right)_{1 \leqslant k \leqslant N}$ est libre dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

indication

Plusieurs approches sont possibles.

1. On peut raisonner par récurrence, dériver de façon à se ramener à l'hypothèse de récurrence en faisant une combinaison linéaire des deux relations obtenues.
2. On peut passer à la limite dans une relation judicieuse.

Exercice 17.14

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soient $\theta_1, \dots, \theta_N \in \mathbb{R}_+^*$ deux à deux distincts.
Montrer que la famille $\left(t \longmapsto \sin(\theta_k t)\right)_{1 \leqslant k \leqslant N}$ est libre dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

indication

On peut raisonner par récurrence, dériver deux fois de façon à se ramener à l'hypothèse de récurrence en faisant une combinaison linéaire des deux relations obtenues.

Exercice 17.15

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On note, pour $j \in [\![0, N+1]\!]$, $\mathrm{x}_j^{(N)} := \dfrac{j}{N+1}$.
On note $\mathscr{V}_N$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$, nulles en 0 et en 1, et affines sur les segments $\left[\mathrm{x}_j^{(N)}, \mathrm{x}_{j+1}^{(N)}\right]$ (pour $j \in [\![0, N]\!]$).

1. Vérifier que $\mathscr{V}_N$ est un espace vectoriel.

2. Soit $j \in [\![1, N]\!]$. Exprimer explicitement l'unique fonction $\mathrm{f}_j^{(N)}$ de $\mathscr{V}_N$ telle que :

$$\forall \ell \in [\![1, N]\!], \quad \mathrm{f}_j^{(N)}\left(\mathrm{x}_\ell^{(N)}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \ell \neq j \\ 1 & \text{si} \quad \ell = j. \end{cases}$$

3. Montrer que $\left(\mathrm{f}_1^{(N)}, \dots, \mathrm{f}_N^{(N)}\right)$ forme une base de $\mathscr{V}_N$.

indication

1. Montrer que $\mathscr{V}_N$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

2. Un dessin peut éclairer.

3. La clé : évaluer les fonctions en les $\mathrm{x}_j^{(N)}$.

résultat

2. $$\forall x \in [0,1], \quad \mathrm{f}_j^{(N)} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \left[0, \mathrm{x}_{j-1}^{(N)}\right] \\ (N+1)\left(x - \mathrm{x}_{j-1}^{(N)}\right) & \text{si} \quad x \in \left[\mathrm{x}_{j-1}^{(N)}, \mathrm{x}_j^{(N)}\right] \\ -(N+1)\left(x - \mathrm{x}_{j+1}^{(N+1)}\right) & \text{si} \quad x \in \left[\mathrm{x}_j^{(N)}, \mathrm{x}_{j+1}^{(N)}\right] \\ 0 & \text{si} \quad x \in \left[\mathrm{x}_{j+1}^{(N)}, 1\right]. \end{cases}$$

Exercice 17.16

On considère $(\mathrm{p}_n)_{n \geqslant 1}$ la suite strictement croissante des nombres premiers :

$$\mathrm{p}_1 = 2, \quad \mathrm{p}_2 = 3, \quad \mathrm{p}_3 = 5, \quad \mathrm{p}_4 = 7, \quad \dots$$

Montrer que $\left(\ln(\mathrm{p}_n)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille libre dans $\mathbb{R}$ muni de sa structure de $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

indication

On montre la liberté d'une sous-famille finie. On se donne $\lambda_1 = \dfrac{a_1}{b_1}, \dots, \lambda_n = \dfrac{a_n}{b_n} \in \mathbb{Q}$ tels que :

$$\lambda_1 \ln(\mathrm{p}_1) + \cdots + \lambda_n \ln(\mathrm{p}_n) = 0.$$

Cette égalité est équivalente à :

$$\mathrm{p}_1{}^{\lambda_1} \cdots \mathrm{p}_n{}^{\lambda_n} = 1,$$

puis :

$$\mathrm{p}_1{}^{a_1(b_2 \cdots b_n)} \cdots \mathrm{p}_n{}^{a_n(b_1 \cdots b_{n-1})} = 1.$$

On peut conclure en utilisant l'unicité de la décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers.