William GREGORY

Colle 18

Applications linéaires (début)

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant lundi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Exercice 18.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit $u \in \mathrm{L}(E)$ tel que :

$$u^2 - 3u - 10\,\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}.$$

1. Montrer que u est bijectif et exprimer u^{-1} en fonction de u.

2. Montrer que :

$$E = \mathrm{Ker}(u + 2\,\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u - 5\,\mathrm{Id}_E).$$

Exercice 18.2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit $u \in \mathrm{L}(E)$ tel que :

$$u^2 - 6u - 7\,\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}.$$

1. Montrer que u est bijectif et exprimer u^{-1} en fonction de u.

2. Montrer que :

$$E = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u - 7\,\mathrm{Id}_E).$$

Exercice 18.3

On considère :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}[\mathrm{X}] \\ P & \longmapsto & P(\mathrm{X}^2) + (1+\mathrm{X}^2)P(\mathrm{X}). \end{array} \right.$$

1. Montrer que φ est une application linéaire.

2. Montrer que φ est injective.

3. L'application φ est-elle surjective ?

Exercice 18.4

Soit $n \geqslant 2$. On note $\mathrm{E}_n := \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
On considère :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{E}_n & \longrightarrow & \mathrm{E}_n \\ P & \longmapsto & (\mathrm{X}+2)P(\mathrm{X}) - \mathrm{X}P(\mathrm{X}+1). \end{array} \right.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de l'espace E_n.

2. Déterminer le noyau de φ.

Exercice 18.5

On se place dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ et on considère les applications :

$$\varphi : P \longmapsto P' \quad \text{et} \quad \psi : P \longmapsto \mathrm{X}\,P.$$

1. Justifier que φ et ψ sont des endomorphismes de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

2. Étudier l'injectivité et la surjectivité de φ et ψ.

Exercice 18.6

Soit E un espace vectoriel. Soit $f \in \mathrm{L}(E)$.

1. Montrer que :
$$\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2).$$

2. Montrer que :
$$\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) = E \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2).$$

Exercice 18.7

Soit E un espace vectoriel.

> *Soit F un sous-espace vectoriel de E. Soit $g \in \mathrm{L}(E)$.*
> *On dit que F est stable par g lorsque :*
> $$\forall x \in F, \quad g(x) \in F.$$
> *De manière équivalente, F est stable par g lorsque $g(F) \subset F$.*

1. Soient $u, v \in \mathrm{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$.
Montrer que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v.

2. Soit $u \in \mathrm{L}(E)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. On note $P(u) := \sum_{k=0}^{n} a_k u^k$.

Montrer que $\mathrm{Ker}\big(P(u)\big)$ et $\mathrm{Im}\big(P(u)\big)$ sont stables par u.

Exercice 18.8

Soit E un espace vectoriel. Soit $f \in \mathrm{L}(E)$.

1. Montrer que $\big(\mathrm{Ker}(f^n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion.

2. Soit $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(f^{k_0}) = \mathrm{Ker}(f^{k_0+1})$.
Montrer que :
$$\forall k \geqslant k_0, \quad \mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^{k_0}).$$

3. Donner un espace E et un endomorphisme f dont la suite $\big(\mathrm{Ker}(f^n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante mais non stationnaire.

Exercice 18.9

Soit E un espace vectoriel. Soit $f \in \mathrm{L}(E)$.

1. Montrer que $\big(\mathrm{Im}(f^n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.

2. Soit $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Im}(f^{k_0}) = \mathrm{Im}(f^{k_0+1})$.
Montrer que :
$$\forall k \geqslant k_0, \quad \mathrm{Im}(f^k) = \mathrm{Im}(f^{k_0}).$$

3. Donner un espace E et un endomorphisme f dont la suite $\big(\mathrm{Im}(f^n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire.

Exercice 18.10

Soit E un espace vectoriel.
Soient $f, g \in \mathrm{L}(E)$ tels que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$.

2. Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$.

3. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$.

Exercice 18.11

Trouver un espace vectoriel E et deux endomorphismes $u, v \in \mathrm{L}(E)$ tels que :
$$u \circ v = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad v \circ u \neq \mathrm{Id}_E.$$

Exercice 18.12

Soit E un espace vectoriel. Soient $f \in \mathrm{L}(E)$.
Soit $p \geqslant 2$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts tels que, pour $i \in [\![1, p]\!]$, on a :
$$\mathrm{E}_{\lambda_i}(f) := \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \, \mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}.$$
Montrer que les $\mathrm{E}_{\lambda_i}(f)$ sont en somme directe.

Exercice 18.13

Soit E un espace vectoriel. Soit $f \in \mathrm{L}(E)$.

1. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ avec $\lambda \neq \mu$.
Soient $x, y \in E \setminus \{0_E\}$ tels que :
$$f(x) = \lambda x \quad \text{et} \quad f(y) = \mu y.$$
Montrer que (x, y) est libre.

2. Généraliser.

Exercice 18.14

Soit E un espace vectoriel.
Soit $u \in \mathrm{L}(E)$ tel que :
$$u^n = 0_{\mathrm{L}(E)} \quad \text{et} \quad u^{n-1} \neq 0_{\mathrm{L}(E)}.$$
Soit $x_0 \in E$ tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0_E$.
Montrer que la famille $\big(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0)\big)$ est libre dans E.

Exercice 18.15

Soit E un espace vectoriel. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ distincts. Soit $u \in \mathrm{L}(E)$ tel que :
$$(u - \lambda \, \mathrm{Id}_E) \circ (u - \mu \, \mathrm{Id}_E) = 0_{\mathrm{L}(E)}.$$

1. Simplifier :

(a) $(u - \mu \, \mathrm{Id}_E) \circ (u - \lambda \, \mathrm{Id}_E)$;

(b) $a(u - \lambda \, \mathrm{Id}_E) - b(u - \mu \, \mathrm{Id}_E)$ avec $(a, b) = (1, 1)$ puis $(a, b) = (\mu, \lambda)$.

2. Montrer que $E = \mathrm{Im}(u - \lambda \, \mathrm{Id}_E) + \mathrm{Im}(u - \mu \, \mathrm{Id}_E)$.

3. En déduire que $E = \mathrm{Ker}(u - \lambda \, \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u - \mu \, \mathrm{Id}_E)$.

4. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{K} : \quad u^n = \alpha_n u + \beta_n \, \mathrm{Id}_E.$$