Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2025 – 2026

William GREGORY

Colle 18 • INDICATIONS
Applications linéaires (début)

Exercice 18.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit $u \in \mathrm{L}(E)$ tel que :

$$u^2 - 3u - 10\,\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}.$$

1. Montrer que u est bijectif et exprimer u^{-1} en fonction de u.

2. Montrer que :

$$E = \mathrm{Ker}(u + 2\,\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u - 5\,\mathrm{Id}_E).$$

indication

1. Déterminer v tel que $u \circ v = v \circ u = \mathrm{Id}_E$ à l'aide de la relation vérifiée par u.

2. Raisonner par analyse synthèse. En exprimant $x \in E$ comme $x = y + z$ (avec $y \in \mathrm{Ker}(u+2\,\mathrm{Id}_E)$ et $z \in \mathrm{Ker}(u - 5\,\mathrm{Id}_E)$), écrire $f(x)$ pour en déduire y et z en fonction de x et $f(x)$.

Exercice 18.2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit $u \in \mathrm{L}(E)$ tel que :

$$u^2 - 6u - 7\,\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}.$$

1. Montrer que u est bijectif et exprimer u^{-1} en fonction de u.

2. Montrer que :

$$E = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u - 7\,\mathrm{Id}_E).$$

indication

1. Déterminer v tel que $u \circ v = v \circ u = \mathrm{Id}_E$ à l'aide de la relation vérifiée par u.

2. Raisonner par analyse synthèse. En exprimant $x \in E$ comme $x = y + z$ (avec $y \in \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$ et $z \in \mathrm{Ker}(u - 7\,\mathrm{Id}_E)$), écrire $f(x)$ pour en déduire y et z en fonction de x et $f(x)$.

Exercice 18.3

On considère :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P(X^2) + (1+X^2)P(X). \end{array} \right.$$

1. Montrer que φ est une application linéaire.

2. Montrer que φ est injective.

3. L'application φ est-elle surjective ?

indication

1. Sans difficulté.

2. Établir qu'un polynôme du noyau est nul ou de degré 2, puis regarder ce qu'il se passe pour un polynôme de degré 2.

3. Remarquer que $\deg(\varphi(P)) = -\infty$ ou 0 ou $\geqslant 2$.

Exercice 18.4

Soit $n \geqslant 2$. On note $E_n := \mathbb{R}_n[X]$.
On considère :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} E_n & \longrightarrow & E_n \\ P & \longmapsto & (X+2)P(X) - XP(X+1). \end{array} \right.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de l'espace E_n.

2. Déterminer le noyau de φ.

indication

1. Il faut vérifier que l'application est correctement définie, *i.e.* est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Établir qu'un polynôme du noyau admet 0 et -1 comme racines (en évaluant en -1 et 0).

résultat

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}\big(X(X+1)\big).$$

Exercice 18.5

On se place dans $\mathbb{R}[X]$ et on considère les applications :

$$\varphi : P \longmapsto P' \quad \text{et} \quad \psi : P \longmapsto X\,P.$$

1. Justifier que φ et ψ sont des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$.

2. Étudier l'injectivité et la surjectivité de φ et ψ.

indication

1. Sans difficulté.

2.
- Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) \neq \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$ (contient les polynômes constants).
- Montrer que $\mathrm{Im}(\psi)$ est l'ensemble des polynômes dont 0 est racine.

résultat

- φ est surjectif mais pas injectif.
- ψ est injectif mais pas surjectif.

Exercice 18.6

Soit E un espace vectoriel. Soit $f \in \mathrm{L}(E)$.

1. Montrer que :

$$\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\} \iff \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2).$$

2. Montrer que :

$$\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) = E \iff \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2).$$

indication

Sans contexte de dimension finie, tout montrer par double implication et les égalités ensemblistes par double inclusion.

Exercice 18.7

Soit E un espace vectoriel.

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Soit $g \in \mathrm{L}(E)$.
On dit que F est stable par g lorsque :

$$\forall x \in F, \quad g(x) \in F.$$

De manière équivalente, F est stable par g lorsque $g(F) \subset F$.

1. Soient $u, v \in \mathrm{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$.
Montrer que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v.

2. Soit $u \in \mathrm{L}(E)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. On note $P(u) := \sum_{k=0}^{n} a_k u^k$.

Montrer que $\mathrm{Ker}\big(P(u)\big)$ et $\mathrm{Im}\big(P(u)\big)$ sont stables par u.

indication

1. Écrire avec des quantificateurs ce que signifie $x \in \mathrm{Ker}(u)$ et $y \in \mathrm{Im}(u)$, puis utiliser la relation de commutation.

2. Utiliser la première question en remarquant que $u \circ P(u) = P(u) \circ u$.

Exercice 18.8

Soit E un espace vectoriel. Soit $f \in \mathrm{L}(E)$.

1. Montrer que $\big(\mathrm{Ker}(f^n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion.

2. Soit $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(f^{k_0}) = \mathrm{Ker}(f^{k_0+1})$. Montrer que :

$$\forall k \geqslant k_0, \quad \mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^{k_0}).$$

3. Donner un espace E et un endomorphisme f dont la suite $\big(\mathrm{Ker}(f^n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante mais non stationnaire.

indication

1. Sans difficulté.
2. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ \operatorname{Ker}(f^{k_0+k+1}) = \operatorname{Ker}(f^{k_0+k})$.
3. On peut par exemple se placer dans $E = \mathbb{K}[X]$.

Exercice 18.9

Soit E un espace vectoriel. Soit $f \in L(E)$.

1. Montrer que $\left(\operatorname{Im}(f^n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.
2. Soit $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{Im}(f^{k_0}) = \operatorname{Im}(f^{k_0+1})$. Montrer que :
$$\forall k \geqslant k_0, \quad \operatorname{Im}(f^k) = \operatorname{Im}(f^{k_0}).$$
3. Donner un espace E et un endomorphisme f dont la suite $\left(\operatorname{Im}(f^n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire.

indication

1. Sans difficulté.
2. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ \operatorname{Im}(f^{k_0+k+1}) = \operatorname{Im}(f^{k_0+k})$.
3. On peut par exemple se placer dans $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 18.10

Soit E un espace vectoriel.
Soient $f, g \in L(E)$ tels que $f \circ g = \operatorname{Id}_E$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker}(f)$.
2. Montrer que $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im}(g)$.
3. Montrer que $E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(g)$.

indication

1. Raisonner par double inclusion. L'une se fait sans difficulté et sans l'hypothèse $f \circ g = \operatorname{Id}_E$.
2. Raisonner par double inclusion. L'une se fait sans difficulté et sans l'hypothèse $f \circ g = \operatorname{Id}_E$.
3. Raisonner par analyse-synthèse. Dans la phase d'analyse, lorsque l'on écrit $x = y + z$ ($x \in E$, $y \in \operatorname{Ker}(f)$ et $z \in \operatorname{Im}(g)$), appliquer f pour déterminer z.
   Autre méthode. On peut montrer que $p := g \circ f$ est une projection, utiliser les résultats sur les projections et les questions précédentes.

Exercice 18.11

Trouver un espace vectoriel E et deux endomorphismes $u, v \in L(E)$ tels que :
$$u \circ v = \operatorname{Id}_E \quad \text{et} \quad v \circ u \neq \operatorname{Id}_E.$$

indication

On pourra par exemple regarder des espaces de fonctions, tels que $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Remarque. Ne pas prendre un espace de dimension finie.

résultat

$$E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), \quad u : f \longmapsto f', \quad \text{et} \quad v : f \longmapsto \left(x \longmapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Exercice 18.12

Soit E un espace vectoriel. Soient $f \in \mathrm{L}(E)$.
Soit $p \geqslant 2$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts tels que, pour $i \in [\![1, p]\!]$, on a :

$$\mathrm{E}_{\lambda_i}(f) := \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \,\mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}.$$

Montrer que les $\mathrm{E}_{\lambda_i}(f)$ sont en somme directe.

indication

Comprendre que

$$x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \,\mathrm{Id}_E) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = \lambda_i x$$

et raisonner par récurrence.

Exercice 18.13

Soit E un espace vectoriel. Soit $f \in \mathrm{L}(E)$.

1. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ avec $\lambda \neq \mu$.
Soient $x, y \in E \setminus \{0_E\}$ tels que :

$$f(x) = \lambda x \quad \text{et} \quad f(y) = \mu y.$$

Montrer que (x, y) est libre.

2. Généraliser.

indication

1. On écrira deux relations pour montrer que l'un des scalaires est nul, puis l'autre.
2. Raisonner par récurrence.

Exercice 18.14

Soit E un espace vectoriel.
Soit $u \in \mathrm{L}(E)$ tel que :

$$u^n = 0_{\mathrm{L}(E)} \quad \text{et} \quad u^{n-1} \neq 0_{\mathrm{L}(E)}.$$

Soit $x_0 \in E$ tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0_E$.
Montrer que la famille $\left(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0)\right)$ est libre dans E.

indication

Se donner $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 u(x_0) + \cdots + \lambda_{n-1} u^{n-1}(x_0) = 0_E,$$

et composer cette relation par u, u^2, …, u^{n-1} de façon à obtenir un système triangulaire en $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$.

Exercice 18.15

Soit E un espace vectoriel. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ distincts. Soit $u \in \mathrm{L}(E)$ tel que :

$$(u - \lambda \operatorname{Id}_E) \circ (u - \mu \operatorname{Id}_E) = 0_{\mathrm{L}(E)}.$$

1. Simplifier :

(a) $(u - \mu \operatorname{Id}_E) \circ (u - \lambda \operatorname{Id}_E)$;

(b) $a(u - \lambda \operatorname{Id}_E) - b(u - \mu \operatorname{Id}_E)$ avec $(a, b) = (1, 1)$ puis $(a, b) = (\mu, \lambda)$.

2. Montrer que $E = \operatorname{Im}(u - \lambda \operatorname{Id}_E) + \operatorname{Im}(u - \mu \operatorname{Id}_E)$.

3. En déduire que $E = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(u - \mu \operatorname{Id}_E)$.

4. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{K} : \quad u^n = \alpha_n u + \beta_n \operatorname{Id}_E.$$

indication

1. Développer puis simplifier.

2. Utiliser que $(u - \lambda \operatorname{Id}_E) - (u - \mu \operatorname{Id}_E) = (\mu - \lambda) \operatorname{Id}_E$ pour écrire $x \in E$ sous la forme voulue.

3. Montrer que $\operatorname{Im}(u - \lambda \operatorname{Id}_E) \subset \operatorname{Ker}(u - \mu \operatorname{Id}_E)$ et $\operatorname{Im}(u - \mu \operatorname{Id}_E) \subset \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}_E)$, puis montrer que l'intersection est nulle.

4. Raisonner par récurrence, en utilisant la relation donnée dans l'énoncé pour comprendre le cas $n = 2$.

résultat

1. **(a)** $(u - \mu \operatorname{Id}_E) \circ (u - \lambda \operatorname{Id}_E) = 0_{\mathrm{L}(E)}$.

(b) $(u - \lambda \operatorname{Id}_E) - (u - \mu \operatorname{Id}_E) = (\mu - \lambda) \operatorname{Id}_E$ et $\mu(u - \lambda \operatorname{Id}_E) - \lambda(u - \mu \operatorname{Id}_E) = (\mu - \lambda) u$.

4. $(\alpha_0, \beta_0) = (0, 1)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}) = \big((\lambda + \mu)\alpha_n + \beta_n, -\lambda\mu\alpha_n\big)$.