**Lycée Chateaubriand**
**MPSI 3 • 2025 – 2026**
William GREGORY

# Colle 19

## Applications linéaires

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant lundi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

### Exercice 19.1

Soit $n \geqslant 2$. On note $\mathrm{E}_n := \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
On considère :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{E}_n & \longrightarrow & \mathrm{E}_n \\ P & \longmapsto & (\mathrm{X}^2 - \mathrm{X})P(1) + (\mathrm{X}^2 + \mathrm{X})P(-1). \end{array} \right.$$

**1.** Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de l'espace $\mathrm{E}_n$.

**2.** Déterminer le noyau de $\varphi$.

**3.** Déterminer l'image de $\varphi$.

### Exercice 19.2

On se place dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ et on considère :

$$\varphi : P \longmapsto P' \quad \text{et} \quad \psi : P \longmapsto \mathrm{X}\,P.$$

**1.** Justifier que $\varphi$ et $\psi$ sont des endomorphismes de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

**2.** Étudier l'injectivité et la surjectivité de $\varphi$ et $\psi$.

### Exercice 19.3

Soient $E$, $F$ et $G$ trois espaces vectoriels.
Soient $u \in \mathrm{L}(E, F)$ et $v \in \mathrm{L}(F, G)$.
Montrer que :

$$v \circ u = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v).$$

### Exercice 19.4

Soit $E$ un espace vectoriel.
Soient $N$ et $I$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.
On note :

$$\mathscr{A} := \left\{ f \in \mathrm{L}(E) \;\middle|\; \begin{cases} N \subset \mathrm{Ker}(f) \\ \mathrm{Im}(f) \subset I \end{cases} \right\}.$$

**1.** Montrer que $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{L}(E)$.

**2.** Montrer que $\mathscr{A}$ est stable par composition.

### Exercice 19.5

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit $u \in \mathrm{L}(E)$ tel que $u^3 = u$.

**1.** Peut-on avoir $u$ bijectif ?

**2.** Montrer que :

$$E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E).$$

## Exercice 19.6

On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on considère les deux sous-espaces :

$$\mathscr{D} := \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}\right\} \quad \text{et} \quad \mathscr{P} := \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y+z=0\right\}.$$

**1.** Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathscr{D} \oplus \mathscr{P}$.

**2.** On note p le projecteur sur $\mathscr{P}$, parallèlement à $\mathscr{D}$.
Exprimer, pour $u = (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, le vecteur $\mathrm{p}(u)$.

## Exercice 19.7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer l'ensemble des formes linéaires $\varphi$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$\forall A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), \quad \varphi(AB) = \varphi(BA).$$

## Exercice 19.8

Soit $E$ un espace vectoriel.
Soient $p, q \in \mathrm{L}(E)$ deux projecteurs de même image.

**1.** Simplifier $q \circ p$ et $p \circ q$.

**2.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $f_\lambda := \lambda p + (1-\lambda)q$.

- **(a)** Montrer que $f_\lambda$ est un projecteur.
- **(b)** Déterminer l'image de $f_\lambda$.

## Exercice 19.9

Soit $E$ un espace vectoriel.
Soient $f, g \in \mathrm{L}(E)$ tels que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.

**1.** Montrer que $\mathrm{Ker}(g\circ f) = \mathrm{Ker}(f)$.

**2.** Montrer que $\mathrm{Im}(g\circ f) = \mathrm{Im}(g)$.

**3.** Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$.

## Exercice 19.10

Soit $E$ un espace vectoriel. Soit $f \in \mathrm{L}(E)$.

**1.** Montrer que $\left(\mathrm{Ker}(f^n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion.

**2.** Soit $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(f^{k_0}) = \mathrm{Ker}(f^{k_0+1})$.
Montrer que :

$$\forall k \geqslant k_0, \quad \mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^{k_0}).$$

**3.** Donner un espace $E$ et un endomorphisme $f$ dont la suite $\left(\mathrm{Ker}(f^n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante mais non stationnaire.

## Exercice 19.11

Soit $E$ un espace vectoriel. Soit $f \in \mathrm{L}(E)$.

**1.** Montrer que $\left(\mathrm{Im}(f^n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.

**2.** Soit $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Im}(f^{k_0}) = \mathrm{Im}(f^{k_0+1})$.
Montrer que :

$$\forall k \geqslant k_0, \quad \mathrm{Im}(f^k) = \mathrm{Im}(f^{k_0}).$$

**3.** Donner un espace $E$ et un endomorphisme $f$ dont la suite $\left(\mathrm{Im}(f^n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire.

## Exercice 19.12

Soit $E$ un espace vectoriel. Soit $f \in \mathrm{L}(E)$.

**1.** Montrer que :

$$\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2).$$

**2.** Montrer que :

$$\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) = E \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2).$$

## Exercice 19.13

Soit $E$ un espace vectoriel.
Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Soient $F_1$, ..., $F_q$ des sous-espaces vectoriels de $E$ tels que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_q$.
Pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, on définit l'application :

$$\mathrm{p}_i : \left| \begin{array}{rcl} E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_q & \longrightarrow & F_i \\ x = x_1 + \cdots + x_q & \longmapsto & x_i. \end{array} \right.$$

**1.** Montrer que $(\mathrm{p}_1, \dots, \mathrm{p}_q)$ est un *système complet de projecteurs*, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1, q]\!], \quad \mathrm{p}_i \text{ est un projecteur} \\ \forall (i,j) \in [\![1, q]\!]^2, \quad i \neq j \implies \mathrm{p}_i \circ \mathrm{p}_j = 0_{\mathrm{L}(E)} \\ \mathrm{p}_1 + \cdots + \mathrm{p}_q = \mathrm{Id}_E\,. \end{cases}$$

**2.** Réciproquement, on suppose qu'il existe un système complet de projecteurs $(\mathrm{p}_1, \dots, \mathrm{p}_q)$.
Montrer que $E = \mathrm{Im}(\mathrm{p}_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(\mathrm{p}_q)$.

## Exercice 19.14

- *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$.
- *On note* $\mathrm{T} := \left\{\varphi \in \mathscr{C}^\infty\big([a,b], \mathbb{R}\big) \;\middle|\; \varphi(a) = \varphi(b) = 0\right\}$.
- *On pose, pour* $f \in \mathscr{C}^0\big([a,b], \mathbb{R}\big)$ *et* $\varphi \in \mathrm{T}$, $\langle f \,|\, \varphi \rangle := \displaystyle\int_a^b f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

Soit $u \in \mathscr{C}^1([a,b], \mathbb{R})$ telle que, pour tout $\varphi \in \mathrm{T}$, $\langle u' \,|\, \varphi \rangle = 0$.

**1.** Montrer que $\mathrm{Ker}\big(\langle \mathbb{1}_{[a,b]} \,|\, \cdot \rangle\big) \subset \mathrm{Ker}\big(\langle u \,|\, \cdot \rangle\big)$.

**2.** En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $\varphi \in \mathrm{T}$, $\langle u \,|\, \varphi \rangle = \lambda \,\langle \mathbb{1}_{[a,b]} \,|\, \varphi \rangle$.

## Exercice 19.15

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Déterminer l'ensemble $\mathrm{C}(E) := \left\{u \in \mathrm{L}(E) \;\middle|\; \forall v \in \mathrm{L}(E),\; u \circ v = v \circ u\right\}$.
Indication. On pourra admettre que tout sous-espace vectoriel de $E$ admet un supplémentaire.